Diferensiyel Geometri I

2. Bölüm

Diffeomorfizm

Tanım : U, $\mathbb{E}^n$ $n-$boyutlu öklid uzayında bir açık alt cümle olsun. $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun k-ıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli ise f, C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir.
Özel olarak f sadece sürekli ise C^0 sınıfındandır denir.

Tanım : U, V sırası ile $\mathbb{E}^m$ ve $\mathbb{E}^n$ de birer açık alt cümle olsunlar. Bir

$$\begin{array}{cccl} \psi & : & U & \rightarrow & V \\ & & X & \rightarrow & \psi(X) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) \end{array}$$

fonksiyonu için bütün $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ koordinat fonksiyonları C^k sınıfından iseler $\psi \in C^k(U, V)$ denir. f_i fonksiyonlarına ψ nin öklid fonksiyonları denir.
$C^\infty(U, V) = \{\psi \in C^k(U, V) \mid \forall n \in \mathbb{N}\}$ dir.

Örnek:

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & \mathbb{E}^2 & \to & \mathbb{E}^3 \\ & & (u,v) & \to & \psi(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv, u^3) \end{array}$$

fonksiyonu verilsin.

$$\begin{aligned} f_1(u,v) &= u^2 - v^2 \\ f_2(u,v) &= 2uv \\ f_3(u,v) &= u^3 \end{aligned}$$

olmak üzere $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(\mathbb{E}^2, \mathbb{R})$ olduğundan $\psi \in C^\infty(\mathbb{E}^2, \mathbb{E}^3)$ olur.

Tanım (Diffeomorfizm): U ile V, $\mathbb{E}^n$ nin iki açık alt cümlesi olsun. Bir $\psi : U \rightarrow V$ fonksiyonu için
$D1)$ $\psi \in C^k(U, V)$
$D2$) ψ^{-1} var ve $\psi^{-1} \in C^k(V, U)$
önermeleri doğru ise ψ fonksiyonuna C^k sınıfından bir diffeomorfizm ve U ile V de k. dereceden diffeomorfiktirler denir.

Örnek:

$$\begin{array}{ccccc}\psi & : & \mathbb{E}^2 & \longrightarrow & \mathbb{E}^2 \\ & & (x_1, x_2) & \longrightarrow & \psi(x_1, x_2) = (x_1 e^{x_1} + x_2, x_1 e^{x_2} - x_2)\end{array}$$

verilsin. $\psi \in C^\infty(\mathbb{E}^2, \mathbb{E}^3)$ olur.

$$\begin{array}{ccccc}\psi^{-1} & : & \mathbb{E}^2 & \longrightarrow & \mathbb{E}^2 \\ & & (y_1, y_2) & \longrightarrow & \psi(x_1, x_2) = (\frac{y_2+y_1}{2} e^{\frac{y_2-y_1}{2}}, \frac{y_1-y_2}{2})\end{array}$$

ve $\psi^{-1} \in C^\infty(\mathbb{E}^2, \mathbb{E}^2)$ dir.