Diferensiyel Geometri I

3. Bölüm

Tanjant Vektör, Tanjant Uzay, Vektör Alanı

$p \in \mathbb{E}^n$ olmak üzere $T_{\mathbb{E}^n}(p) = \{(p, \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}_p \mid \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n\}$ cümlesi için iç işlem

$$\begin{array}{cccc} + & : & T_{\mathbb{E}^n}(p) \times T_{\mathbb{E}^n}(p) & \rightarrow & T_{\mathbb{E}^n}(p) \\ & & ((p, \overrightarrow{v}), (p, \overrightarrow{w})) & \rightarrow & (p, \overrightarrow{v}) + (p, \overrightarrow{w}) = (p, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \end{array}$$

ve dış işlem

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & : & \mathbb{R} \times T_{\mathbb{E}^n}(p) & \rightarrow & T_{\mathbb{E}^n}(p) \\ & & (\lambda, (p, \overrightarrow{v})) & \rightarrow & \lambda \cdot (p, \overrightarrow{v}) = (p, \lambda . \overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}_p \end{array}$$

tanımlanıyor.

$(T_{\mathbb{E}^n}(p), +, \cdot)$ cümlesi bir vektör uzayıdır ve bu uzayın elemanlarına tanjant vektör denir.

$$\overrightarrow{v}_p = (p, \overrightarrow{v})$$

şeklinde gösterilir.

$$T_{\mathbb{E}^n}(p) = Sp\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \mid_p, \frac{\partial}{\partial x_2} \mid_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \mid_p \right\}$$

dir.

Tanım (Vektör Alanı): Her noktaya bir tanjant vektör getiren fonksiyona vektör alanı denir.

$$\begin{array}{cccc} \chi & : & \mathbb{E}^n & \rightarrow & \cup_{p\in\mathbb{E}^n} T_{\mathbb{E}^n}(p) \\ & & p & \rightarrow & \chi(p) = \overrightarrow{x_p} \end{array}$$

şeklinde tanımlıdır.
$\chi(\mathbb{E}^n)$ uzayına vektör alanlarının uzayı denir.

$\chi(\mathbb{E}^n)$ vektör uzayı için

$$\chi(\mathbb{E}^n) = Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$$

olup $boy\chi(\mathbb{E}^n) = n$ dir.

Örnek: $X = x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1^2 e^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \in \chi(\mathbb{E}^2)$ vektör alanı verilsin. $P(1,1)$ için $X \mid_P$ vektörünü hesaplayalım.

$$\begin{aligned} X \mid_P &= x_1 x_2 \mid_P \frac{\partial}{\partial x_1} \mid_P + x_1^2 e^{x_2} \mid_P \frac{\partial}{\partial x_2} \mid_P \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \mid_P + e \frac{\partial}{\partial x_2} \mid_P \\ &= (1, e) \mid_P \end{aligned}$$