Diferensiyel Geometri I

4. Bölüm

Yöne Göre Türev

Yöne göre türev konusunu 4 başlıkta inceleyelim.
1-) Tanjant Vektörü Yönünde Türev
2-) Vektör Alanı Yönünde Türev
3-) Eğri Boyunca Türev
4-) Vektör Alanının Vektör Alanı Yönündeki Türev

1-)Tanjant Vektörü Yönünde Türev

Tanım: $f : E^n \to R$ diferensiyellenebilir ve $\overrightarrow{v_p} \in T_{E^n}(P)$ olsun. Bu durumda $\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere,

$$\overrightarrow{v_p}[f] = \frac{d}{dt}(f(P_1 + t(Q_1 - P_1), ..., P_n + t(Q_n - P_n))) \mid_{t=0}$$

reel sayısına f fonksiyonunun $\overrightarrow{v_p}$ ye göre türevi denir.

Teorem: $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n, p \in E^n$ ve $f : E^n \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\overrightarrow{v_p}[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mid_p$$

dir.

Örnek: $f : E^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_1 x_2$ fonksiyonu veriliyor. $P(3,2)$ ve $\overrightarrow{v_p} = (4,-2)$ için fonksiyonun $\overrightarrow{v_p}$ ye göre türevini hesaplayalım.

1.Yol:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_p}[f] &= \frac{df(p+tv)}{dt}\Big|_0 \\
&= \frac{df(3+4t, 2-2t)}{dt}\Big|_0 \\
&= \frac{d\ 2(3+4t)^2 + 3(3+4t)(2-2t)}{dt}\Big|_0 \\
&= 54
\end{aligned}$$

2. Yol

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{v_p}[f] &= \sum_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mid_p \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1} \mid_p v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \mid_p v_2 \\
&= (4x_1 + 3x_2) \mid_p 4 + 3x_1 \mid_p (-2) \\
&= 54
\end{aligned}
$$

Teorem: $\forall f, g \in C(E^n, R)$, $\forall \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{u_p} \in T_{E^n}(p)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için
a) $(a\overrightarrow{v_p} + b\overrightarrow{u_p})[f] = a\overrightarrow{v_p}[f] + b\overrightarrow{u_p}[f]$,
b) $\overrightarrow{v_p}[af + bg] = a\overrightarrow{v_p}[f] + b\overrightarrow{v_p}[g]$
c) $\overrightarrow{v_p}[fg] = \overrightarrow{v_p}[f]g(p) + f(p)\overrightarrow{v_p}[g]$

2-)Bir Vektör Alanı Yönünde Türev

Tanım: $X \in \chi(E^n)$ ve $f \in C(E^n, \mathbb{R})$ olsun. $\forall P \in E^n$ için

$$(X(f))(P) = X_P[f]$$

olmak üzere $X[f] \in C(E^n, \mathbb{R})$ fonksiyonuna, f nin X yönündeki türevi denir.

Örnek: $f : E^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1 x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ fonksiyonunun $P(3,5)$ noktasında $X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e^{x_1 x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \in \chi(E^2)$ vektör alanı yönündeki türevini bulalım.
$\forall P \in E^2$ için

$$\begin{aligned} X_P &= (x_1, e^{x_1 x_2}) \mid_p \\ &= (3, e^{15}) \mid_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_P[f] &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \mid_p v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \mid_p v_2 \\ &= (2x_1 x_2 + x_2^2) \mid_p 3 + (x_1^2 + 2x_1 x_2) \mid_p e^{15} \\ &= 165 + 39e^{15} \end{aligned}$$

bulunur.