Diferensiyel Geometri I

5.Bölüm

Bir Eğri Boyunca Kovaryant Türev

Tanım: $f : E^n \to \mathbb{R}$ diferensiyellebilir bir fonksiyon ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$ bir eğri olsun. f fonksiyonunun α eğrisi boyunca türevi

$$\alpha'(t)[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mid_{\alpha(t)} \alpha_i'(t)$$

dir.

Örnek: $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ fonksiyonunun $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ eğrisi boyunca türevini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \alpha'(t)[f] &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \mid_{\alpha(t)} \alpha_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \mid_{\alpha(t)} \alpha_2'(t) \\ &= 2x_1 x_2 \mid_{\alpha(t)} (-\sin(t)) + x_1^2 \mid_{\alpha(t)} \cos(t) \\ &= -2\sin^2(t)\cos(t) + \cos^3(t) \end{aligned}$$

2. Yol

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)(t) &= f(\alpha(t)) = \cos^2(t)\sin(t) \\ \frac{d(f \circ \alpha)(t)}{dt} &= -2\sin^2(t)\cos(t) + \cos^3(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım : $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ bir eğri ve $X : E^n \rightarrow \cup T_{E^n}(p)$ bir vektör alanı olmak üzere

$$\frac{d\alpha}{dt} = X \mid_{\alpha(t)}$$

eşitliğini sağlayan α eğrisine X vektör alanının integral eğrisi denir.

Örnek: $X = (1, x_1x_2)$ vektör alanının integral eğrisini bulunuz.
$X = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ vektör alanının integral eğrisi
$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= X\mid_{\alpha(t)} \\ (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)) &= (1, \alpha_1\alpha_2) \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \alpha_1'(t) &= 1 \\ \alpha_1(t) &= t + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

olur.

$$
\begin{aligned}
\alpha_2'(t) &= \alpha_1\alpha_2 \\
\frac{\alpha_2'}{\alpha_2} &= t + c_1 \\
\ln \alpha_2 &= \frac{t^2}{2} + tc_1 + c_2, c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Böylece

$$\alpha_2 = e^{\frac{t^2}{2} + tc_1 + c_2}$$

elde edilir. Aradığımız eğri

$$\alpha(t) = \left(t + c_1, e^{\frac{t^2}{2} + tc_1 + c_2}\right)$$

dir.