Diferensiyel Geometri I

6. Bölüm

Bir Vektör Alanının Bir Başka Vektör Alanı Yönündeki Türevi

Tanım: $Y = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $X = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ iki vektör alanı olmak üzere, Y vektör alanının X vektör alanı yönündeki türevi

$$\begin{array}{llll} D: & \chi(E^n) \times \chi(E^n) & \rightarrow & \chi(E^n) \\ & (X, Y) & \rightarrow & D(X, Y) = \quad (X[f_1], X[f_2], ..., X[f_n]) \end{array}$$

şeklindedir.

Örnek: $X = (x_1^2, x_2)$ ve $Y = (x_1 x_2, x_1)$ vektör alanları veriliyor.

$$\begin{aligned} D_X Y &= (X[x_1 x_2], X[x_1]) \\ &= (x_1^2 x_2 + x_1 x_2, x_1^2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D_Y X &= (Y[x_1^2], Y[x_2]) \\ &= (2x_1^2 x_2, x_1) \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım (Lie Operatörü): V bir vektör uzayı

$$[,]: V \times V \to V$$

1) Antisimetrik $[X, Y] = -[Y, X]$
2) $[,]$ iki lineer
3) Jakobi özdeşliği $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$
şartlarını sağlayan $[,]$ operatörüne Lie parantez operatörü denir. $(V, [,])$ ikilisine ise Lie cebiri denir.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayını alalım.

$$\begin{array}{rccc} \times : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\alpha, \beta) & \rightarrow & \alpha \times \beta \end{array}$$

$\mathbb{R}^3$ uzayına vektörel çarpım Lie parantez operatörünün şartlarını sağlar. Dolayısıyla $(\mathbb{R}^3, \times)$ bir Lie cebiridir.

Teorem: $X, Y \in \chi(E^n)$ ve $f, g \in C(E^n, \mathbb{R})$
1) $[X, Y](fg) = [X, Y](f).g + [X, Y](g).f$
2) $[X, Y] = D_X Y - D_Y X$

Dual Uzay ve Kotanjant Uzay

Tanım: V bir vektör uzayı olmak üzere,

$$V^* = \{f \mid f : V \overset{lineer}{\longrightarrow} \mathbb{R}\}$$

uzayına V vektör uzayının dual uzayı denir.
$V = Sp\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ ve $V^* = Sp\{\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*\}$ olmak üzere

$$\alpha_i^*(\alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

dir.

$$T^*_{E^n}(P) = \left\{ w^* \mid w^* : T_{E^n}(P) \overset{lineer}{\longrightarrow} \mathbb{R} \right\}$$

uzayına kotanjant vektör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına kotanjant vektör denir.

$$\chi^*(E^n) = \{ w \mid w : E^n \to \cup T^*_{E^n}(P) \}$$

ise 1-formların uzayı olarak adlandırılır.