Diferensiyel Geometri I

7.Bölüm

Gradiyent, Divergens ve Rotasyonel Fonksiyonları

Tanım (Gradiyent Fonksiyonu)

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{grad}: & C(E^n, \mathbb{R}) & \rightarrow & \chi(E^n) \\ & f & \rightarrow & \mathrm{grad}(f) = \nabla f \quad = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \end{array}$$

şeklinde tanımlı bir lineer fonksiyondur.

Tanım (Divergens Fonksiyonu):

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{div}: & \chi(E^n) & \rightarrow & \chi(E^n) \\ & X & \rightarrow & \mathrm{div}(X) \end{array}$$

şeklinde tanımlı bir lineer fonksiyondur ve

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^n)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(X) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \\ &= \langle \nabla, X \rangle \end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanım (Rotasyonel Fonksiyonu):

$$\begin{array}{rccc} rot: & \chi(E^3) & \rightarrow & \chi(E^3) \\ & X & \rightarrow & rotX \end{array}$$

şeklinde tanımlı lineer bir fonksiyondur ve

$$rot(X) = \nabla \times X$$

şeklindedir.

Bir $X = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \in \chi(E^3)$ vektör alanının için

$$\begin{aligned} rot(X) &= \nabla \times X \\ &= (\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3})\frac{\partial}{\partial x_1} - (\frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_3})\frac{\partial}{\partial x_2} + (\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2})\frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek: $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ fonksiyonu verilsin.

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} \\ &= x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \in \chi(E^2) \end{aligned}$$

dir.
$X = x_1^2 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + x_1 x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} \in \chi(E^2)$ vektör alanı verilsin.

$$\mathrm{div}(X) = 3x_1$$

elde edilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(rot(X)) &= 0 \in C(E^3, \mathbb{R}) \\ rot(\mathrm{grad}(f)) &= 0 \in \chi(E^3) \end{aligned}$$

eşitlikleri kolayca gösterilebilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \mathrm{div} \circ \nabla &= \Delta \\ \mathrm{div}(\nabla f) &= \Delta f \end{aligned}$$

dir.