Diferensiyel Geometri I

9.Bölüm

$\mathbf{F}_*|_p$ Lineer Dönüşümüne Karşılık Gelen Matris

Bir önceki bölümde $F_* \,|_p$ türev dönüşümünün lineer olduğu ifade edilmiştir. O halde bu dönüşüme karşılık bir matris gelir. Bu bölümde bu dönüşüme karşılık gelen matrisi standart baza göre hesaplayacağız.

$$F : \quad E^n \quad \longrightarrow \quad E^m$$

bir dönüşümünün türev dönüşümü

$$F_* \,|_p : \quad T_{E^n}(p) \quad \longrightarrow \quad T_{E^m}(p)$$

olsun.

$$
\begin{aligned}
\phi &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \mid_p, \frac{\partial}{\partial x_2} \mid_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \mid_p \right\} \\
\psi &= \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \mid_{F(p)}, \frac{\partial}{\partial y_2} \mid_{F(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \mid_{F(p)} \right\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
(F_*)_P\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \mid_p\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mid_p \frac{\partial}{\partial y_i} \mid_{F(P)}
$$

dir.

$$[F_* \mid_p]_{\phi\psi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \mid_p & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \mid_p & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \mid_p \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \mid_p & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \mid_p & & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \mid_p \end{bmatrix}_{m \times n} = J(F, P)$$

elde edilir. F nin türev dönüşümünün karşılık geldiği bu matris Jacobian matris olarak adlandırılır.

Örnek: E^2 nin bir koordinat sistemi $\{x_1, x_2\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{cccc} F: & E^2 & \to & E^2 \\ & (x_1, x_2) & \to & F(x_1, x_2) = \quad (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2) \end{array}$$

dönüşümünün türev dönüşümünün matrisi

$$[F_* \mid_p]_\phi = \begin{bmatrix} 2x_1 \mid_p & -2x_2 \mid_p \\ 2x_2 \mid_p & 2x_1 \mid_p \end{bmatrix} = J(F, P)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem: (Ters Fonksiyon Teoremi)

$$F: \quad E^n \quad \longrightarrow \quad E^m$$

herhangi bir $P \in E^n$ noktasında $F_* \mid_P$birebir olacak şekilde bir dönüşüm olsun. Bu durumda U, P noktasının bir komşuluğu ve V, $F(P)$ nin bir komşuluğu olmak üzere

$$F: \quad U \subset E^n \quad \longrightarrow \quad V \subset E^m$$

bir diffeomorfizmdir.