Diferensiyel Geometri I

10. Bölüm

Eğriler Teorisi

Tanım: I, $\mathbb{R}$ nin açık bir aralığı olmak üzere

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^n$$

biçiminde düzgün $\left(C^{\infty}\right.$ sınıfından$\left.\right)$ bir α dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ uzayı içinde bir **eğri** denir. Burada $I \subset \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir.

Örnek: (Çember) $I = \{t \mid t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ve

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & I & \rightarrow & \mathbb{E}^3 \\ & t & \rightarrow & \alpha(t) = (r\cos(t), r\sin(t), 0) \end{array}$$

olmak üzere α eğrisi $\mathbb{E}^3$ bir çemberdir.

Tanım: (Parametre Değişimi) $\mathbb{E}^n$ de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu verilsin.

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \rightarrow I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir parametre değişimi denir.

Örnek: $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ eğrisi verilsin. $h(s) = 2s$ diferensiyellenebilir fonksiyon ile $\beta(s) = (\cos(2s), \sin(2s))$ eğrisi elde edilir. Böylece α eğrisi s parametresi ile yeniden parametrelendirilmiş olunur.

Tanım: $\mathbb{E}^n$ de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \to \mathbb{E}^n$ fonksiyonunun öklid koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ olmak üzere

$$\alpha'(t) = (\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, ..., \frac{d\alpha_n}{dt})$$

$\alpha'(t) \in T_{\mathbb{E}^n}(t)$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında hız vektörü denir.

Örnek: $I = \left\{ t \mid 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \right\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \alpha : & I & \rightarrow & \mathbb{E}^3 \\ & t & \rightarrow & \alpha(t) = \quad (2\cos^2(t), \sin(2t), 2\sin(t)) \end{array}$$

eğrisinin $t = \pi/4$ noktasındaki hız vektörünü hesaplayalım.

$$\alpha'(t) = (-4\cos(t)\sin(t), 2\cos(2t), 2\cos(t))$$

olduğundan

$$\alpha'(\frac{\pi}{4}) = (-2, 0, \sqrt{2})$$

bulunur.