# Diferensiyel Geometri I

11. Bölüm

## Eğrinin Tanjant Uzayı

**Tanım:** $I$, $\mathbb{R}$ nin açık bir aralığı olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \alpha : & I & \longrightarrow & \mathbb{E}^n \\ & t & \longrightarrow & \alpha(t) = \ (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t)) \end{array}$$

eğrisinin hız vektör alanı

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), ..., \alpha_n'(t))$$

olur.

$$Sp\left\{\alpha'(t_0)\right\} = T_\alpha \alpha(t_0)$$

uzayı $\alpha$ eğrisinin $\alpha(t_0)$ noktasında tanjant uzayını ifade eder.

**Tanım:** $I$, $\mathbb{R}$ nin açık bir aralığı olmak üzere

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^n$$

eğrisi veilsin.

$$\begin{array}{rccc} \| \alpha' \|: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longrightarrow & \| \alpha'(t) \| \end{array}$$

fonksiyonu eğrinin skalar hız fonksiyonu olarak adlandılır. $t = t_0$ için $\| \alpha'(t_0) \|$ değerine de eğrinin $t_0$ noktasında skalar hızı denir.

**Tanım: (Birim hızlı eğri)** $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ eğrisi için $\forall s \in I$ için $\| \alpha'(s) \| = 1$ ise $\alpha$ eğrisi birim hızlı eğri olarak adlandırılır. $s$ parametresine ise eğrinin yay-parametresi denir.

**Örnek:** $\alpha(s) = (\cos(s), \sin(s))$ eğrisi birim hızlı bir eğridir. Ancak $\beta(s) = (\cos(2s), \sin(2s))$ eğrisi $\| \beta'(s) \| = 2$ olduğundan birim hızlı bir eğri değildir.

**Tanım: (Regüler Eğri)** $\forall t \in I$ için $\| \alpha'(t) \| \neq 0$ ise $\alpha$ eğrisi regüler bir eğridir.

**Teorem:** Regüler her eğri birim hızlı eğri haline getirilebilir.

**Örnek:**

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & I & \to & \mathbb{E}^3 \\ & t & \to & \alpha(t) = e^t(\cos(t), \sin(t), 1) \end{array} \quad , \quad I = (0, \pi)$$

eğrisi veriliyor.
**a)** $\alpha$ eğrisinin yay uzunluğunu hesaplayınız.
**b)** $\alpha$ eğrisini yay parametresi ile ifade ediniz.

**Çözüm:**$\alpha'(t) = (e^t\cos(t) - e^t\sin(t), e^t\sin(t) + e^t\cos(t), e^t)$ olduğundan $\| \alpha'(t) \| = \sqrt{3}e^t$ elde edilir.

**a)** $\alpha$ eğrisinini yay uzunluğunu $L$ ile gösterelim:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi} \| \alpha'(t) \| \, dt \\ &= \sqrt{3}(e^{\pi} - 1) \end{aligned}$$

bulunur.

**b)**

$$\begin{aligned} h(t) &= s = \int_0^{t} \| \alpha'(u) \| \, du \\ &= \sqrt{3}(e^{t} - 1) \end{aligned}$$

bulunur.

Buradan

$$t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} - 1\right) = h^{-1}(s)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\alpha$ eğrisinin yay parametresi ile parametrelendirilmiş hali

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= (\alpha \circ h^{-1})(s) \\
&= \alpha\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} - 1\right)\right) \\
&= \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\left(\cos\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} - 1\right), \sin\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} - 1\right), 1\right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.