Diferensiyel Geometri I

12. Bölüm

Serret-Frenet Vektör Alanı

Tanım: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. $\left\{\alpha'(t), \alpha''(t), ..., \alpha^{(r)}(t)\right\}$ lineer bağımsız vektörler olmak üzere *Gramm – Schmidt* metodu ile elde edilen $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ortonormal sisteme Serret-Frenet vektör alan sistemi denir.

$$\begin{aligned} E_1 &= \alpha'(t) \\ E_2 &= \alpha''(t) - \frac{< \alpha''(t), E_1 >}{< E_1, E_1 >} E_1 \\ &\vdots \\ E_r &= \alpha^{(r)}(t) - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{< \alpha^{(r)}(t), E_i >}{< E_i, E_i >} E_i \end{aligned}$$

ortogonal sistemi elde edilir.

Buradan

$$\left\{ v_1 = \frac{E_1}{\parallel E_1 \parallel}, v_2 = \frac{E_2}{\parallel E_2 \parallel}, ..., v_r = \frac{E_r}{\parallel E_r \parallel} \right\}$$

ortonormal sistem elde edilir. Bu vektör sistemine Frenet r-ayaklı sistemi diyeceğiz.

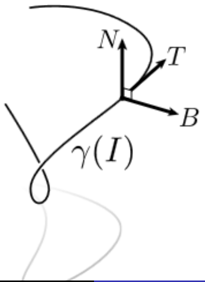
n=3 için

$$\begin{aligned} v_1 &= T \text{ (Teğet Vektör Alanı)} \\ v_2 &= N \text{ (Normal Vektör Alanı)} \\ v_3 &= B \text{ (Binormal Vektör Alanı)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu vektörler bir sağ sistem oluştururlar. Yani

$$T \times N = B, N \times B = T \text{ ve } B \times T = N$$

dir. Bir γ eğrisi üzerinde Serret-Frenet vektörleri şu şekilde gösterilebilir.



Örnek: $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ eğrisini ele alalım.

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= (-\sin(t), \cos(t), 1) \\
\alpha''(t) &= (-\cos(t), -\sin(t), 0) \\
\alpha'''(t) &= (\sin(t), -\cos(t), 0)
\end{aligned}$$

olup $\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)) = 1 \neq 0$ olduğundan bu eğrinin her noktasında $\{T, N, B\}$ Frenet vektör alanı sistemi vardır.

Teorem: Bir α eğrisinin Frenet r-ayaklısı eğrinin parametre seçiminden bağımsızdır.

Teorem:

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & I & \longrightarrow & \mathbb{E}^3 \\ & s & \longrightarrow & \alpha(s) \end{array}$$

eğrisini alalım. s eğrinin yay parametresi ise Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s) \\ N(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\| \alpha''(s) \|} \\ B(s) &= T(s) \times N(s) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem:

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & I & \longrightarrow & \mathbb{E}^3 \\ & t & \longrightarrow & \alpha(t) \end{array}$$

eğrisini alalım. t eğrinin herhangi bir parametresi ise eğrinin Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\| \alpha'(t) \|} \\ B(t) &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\| \alpha'(t) \times \alpha''(t) \|} \\ N(t) &= B(t) \times T(t) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Örnek:

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & I & \rightarrow & \mathbb{E}^3 \\ & t & \rightarrow & \alpha(t) = \quad (2t, t^2, t^3/3) \end{array}$$

eğrisinin Frenet vektörlerini bulunuz.
Çözüm:

$$\alpha'(t) = (2, 2t, t^2)$$

olduğundan $\| \alpha'(t) \| \neq 1$ dir. Böylece eğri yay parametreli bir eğri değildir.

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= (0, 2, 2t) \\ \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= (2t^2, -4t, 4) \end{aligned}$$

bulunur.

Böylece

$$
\begin{aligned}
T(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\| \alpha'(t) \|} = \frac{1}{2+t^2}(2, 2t, t^2) \\
B(t) &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\| \alpha'(t) \times \alpha''(t) \|} = \frac{1}{2+t^2}(t^2, -2t, 2) \\
N(t) &= B(t) \times T(t) = \frac{1}{(2+t^2)^2}(-2t^3 - 4t, -t^4 + 4, 2t^3 + 4t)
\end{aligned}
$$

elde edilir.