Diferensiyel Geometri I

13. Bölüm

Bir Eğrinin Oskülatör Düzlemleri

Tanım: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi ve $\{T, N, B\}$ Frenet vektör alan sistemi verilsin.

(1) $Sp\{T, N\}$ düzlemine α eğrisinin oskülatör düzlemi denir.

(2) $Sp\{N, B\}$ düzlemine α eğrisinin normal düzlemi denir.

(3) $Sp\{T, B\}$ düzlemine α eğrisinin rektifiyan düzlemi denir.

Örnek: $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ eğrisinin $t = \pi/2$ noktasında normal düzlem denklemini bulunuz.
Çözüm: Eğrinin normal düzlemi $Sp\{N, B\}$ ile belirlendiğinden

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{\alpha X}, N, B) &= 0 \\ \langle \overrightarrow{\alpha X}, T \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. Böylece

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(t), \cos(t), 1) \\ T\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \end{aligned}$$

ve

$$\alpha(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, \frac{\pi}{2}), \quad \overrightarrow{\alpha X} = (x, y-1, z-\frac{\pi}{2})$$

elde edilir. Böylece aranılan düzlem denklemi

$$-x + z - \frac{\pi}{2} = 0$$

dır.

Bir Eğrinin Eğrilikleri

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & I & \longrightarrow & \mathbb{E}^n \\ & s & \longrightarrow & \alpha(s) \end{array}$$

yay-parametreli eğrisi ve $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ Frenet vektörleri verilsin.

$$\begin{array}{rcccc} k_i : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & s & \longrightarrow & k_i(s) = & \langle v_i', v_{i+1} \rangle \end{array}$$

fonksiyonuna α eğrisinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu denir. $k_i(s)$ reel sayısına da α nın $i-$yinci eğriliği denir.

n=3

$$\begin{aligned} k_1(s) &= \langle v_1', v_2 \rangle \\ k_2(s) &= \langle v_2', v_3 \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonları sırasıyla eğrinin eğriliği ve burulması olarak adlandırılır.

Teorem:

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & I & \longrightarrow & \mathbb{E}^3 \\ & s & \longrightarrow & \alpha(s) \end{array}$$

yay parametreli eğrisi ve $\{T, N, B\}$ Frenet vektörleri verilsin. κ eğrinin eğriliği ve τ eğrinin burulması olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

formülleri Frenet formülleri olarak adlandırılır.

$k_1(s) = \kappa(s)$ eğriliği, eğrinin teğetinden ne kadar saptığını ölçer.
Bir doğrunun eğriliği sıfırdır.
$k_2(s) = \tau(s)$ eğriliği (burulması), eğrinin oskülatör düzlemden sapmasını ölçer.
Sonuç: Bir α eğrisi düzlemseldir $\Leftrightarrow k_2(s) = 0$

Teorem:

$$\begin{aligned} \alpha: \quad I &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ t &\rightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

eğrisini alalım. t eğrinin herhangi bir parametresi ise eğrinin eğriliği ve burulması

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\| \alpha'(t) \times \alpha''(t) \|}{\| \alpha'(t) \|^3} \\ \tau(t) &= \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\| \alpha'(t) \times \alpha''(t) \|^2} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Örnek:

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & I & \rightarrow & \mathbb{E}^3 \\ & s & \rightarrow & \alpha(s) = \left(\frac{4}{5}\cos(s), 1-\sin(s), -\frac{3}{5}\cos(s)\right) \end{array}$$

parametrik ifadesiyle verilen eğrinin $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ eğriliklerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{4}{5}\sin(s), -\cos(s), \frac{3}{5}\sin(s)\right)$$

olduğundan $\| \alpha'(s) \| = 1$ dir. Böylece eğri yay parametreli bir eğridir.

Eğrinin Frenet vektörleri

$$
\begin{aligned}
T(s) &= \left(-\frac{4}{5}\sin(s), -\cos(s), \frac{3}{5}\sin(s)\right) \\
N(s) &= \left(-\frac{4}{5}\cos(s), \sin(s), \frac{3}{5}\cos(s)\right) \\
B(s) &= \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur. Böylece

$$
\begin{aligned}
\kappa(s) &= \langle T', N\rangle = 1 \\
\tau(s) &= \langle N', B\rangle = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.