Diferensiyel Geometri I

14.Bölüm

Bazı Özel Eğriler

1) Küresel Eğriler

Teorem: $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ yay parametreli bir eğri ve k_1, $k_2 \neq 0$ eğrinin eğrilikleri olmak üzere

$$\alpha \text{ eğrisi } r \text{ yarıçaplı } \mathbb{S}^2 \text{ küresi üzerindedir} \Longleftrightarrow \frac{k_2}{k_1} + \left[\left(\frac{1}{k_1} \right)' \frac{1}{k_2} \right]' = 0$$

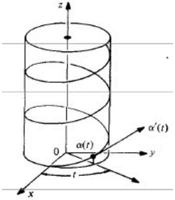
dir.

2) Helis (Eğilim Çizgisi)

Tanım: Bir $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, bir U sabit vektörü ile sabit açı yapıyorsa, α eğrisine bir helis (eğilim çizgisi) denir.
$\| T(s) \| = \| \overrightarrow{U} \| = 1$

$$\langle T(s), \overrightarrow{U} \rangle = \cos\theta$$

U sabit doğrultusu helis ekseni olarak adlandırılır.



Dairesel Helis

Teorem: $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ bir eğri ve k_1, $k_2 \neq 0$ eğrinin eğrilikleri olmak üzere

$$\alpha \text{ eğrisi bir helistir} \iff \frac{k_2(s)}{k_1(s)} = \tan\theta = \mathit{sabit}$$

Eğer k_1 ve k_2 eğriliklerinin her ikisi de sabit ise eğri dairesel helis (silindirik helis) olarak adlandırılır.

Teorem: α yay parametreli bir eğri olmak üzere

$$\alpha : I \to \mathbb{E}^3 \text{ helistir} \iff \det(\alpha''(s), \alpha'''(s), \alpha^{\imath v}(s)) = 0$$

dır.

Örnek: $\alpha(s) = \left(\frac{1}{3}(1+s)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-s)^{3/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}s\right)$ eğrisinin bir helis olduğunu gösteriniz. Eksenini bulunuz.
Çözüm:

$$
\begin{aligned}
k_1(s) &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1-s^2)^{1/2}} \\
k_2(s) &= \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1-s^2)^{1/2}}
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece

$$\frac{k_2}{k_1} = 1$$

olduğundan α bir helistir.

$$
\begin{aligned}
\frac{k_2}{k_1} &= \tan\theta = 1 \\
\theta &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Helisin ekseni

$$
\begin{aligned}
U &= \cos\theta T + \sin\theta B \\
&= (0,0,1)
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır.

3) İnvolüt ve Evolüt Eğri Çifti

Tanım: Birim hızlı bir α eğrisi ve aynı aralıkta tanımlı bir β eğrisi alalım.. Bu eğrilerin Frenet r-ayaklıları sırasıyla $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), V_2^*(s), ..., V_r^*(s)\}$ olmak üzere;

$$\langle V_1(s), V_1^*(s)\rangle = 0$$

ise α eğrisine β eğrisinin involütü ve β eğrisine de α eğrisinin evolütü denir.

Örnek: Birim hızlı bir $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisi ve bu eğrinin eğrilik merkezlerinin geometrik yeri olan $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_1} V_2(s)$ eğrisi veriliyor. β eğrisi α eğrisinin evolütüdür. Gösteriniz.
Çözüm: α eğrisinin ve β eğrisinin Frenet vektörleri $\{V_1, V_2, V_3\}$ ve $\{V_1^*, V_2^*, V_3^*\}$ olmak üzere

$$\langle V_1, V_1^* \rangle = 0$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$V_1(s) = \alpha'(s) \quad \text{ve} \quad V_1^*(s) = \frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|}$$

$$\begin{aligned}
\beta'(s) &= \alpha'(s) - \frac{k_1'}{k_1^2} V_2(s) + \frac{1}{k_1} V_2'(s) \\
&= \alpha'(s) - \frac{k_1'}{k_1^2} V_2(s) - V_1(s) + \frac{k_2}{k_1} V_3(s) \\
&= -\frac{k_1'}{k_1^2} V_2(s) + \frac{k_2}{k_1} V_3(s)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle V_1, V_1^* \rangle &= \langle V_1, \frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|} \rangle \\
&= \frac{1}{\|\beta'(s)\|} \langle V_1, \beta'(s) \rangle \\
&= \frac{1}{\|\beta'(s)\|} \langle V_1, -\frac{k_1'}{k_1^2} V_2(s) + \frac{k_2}{k_1} V_3(s) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece α ve β eğrileri involüt evolüt eğri çiftleridir.

4) Bertrand Eğri Çifti

Tanım: Birim hızlı bir α eğrisi ve aynı aralıkta tanımlı bir β eğrisi alalım. Bu eğrilerin Frenet r-ayaklıları sırasıyla $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), V_2^*(s), ..., V_r^*(s)\}$ olmak üzere;

$$\{V_2(s), V_2^*(s)\}$$

lineer bağımlı ise α ve β eğrisi çifti Bertrand eğri çiftidir.