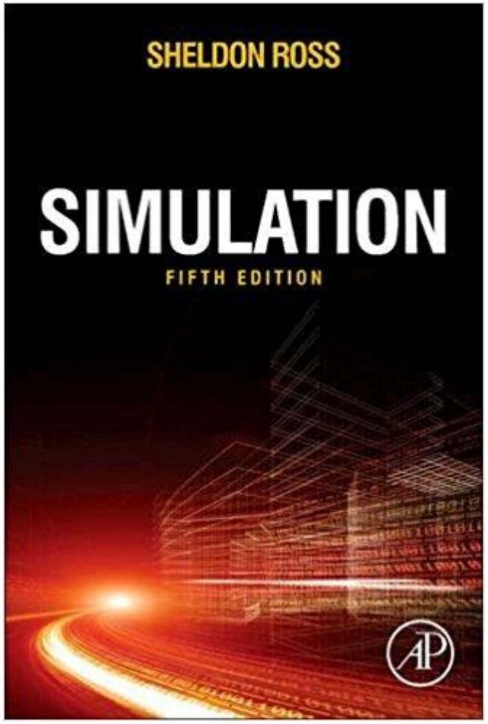
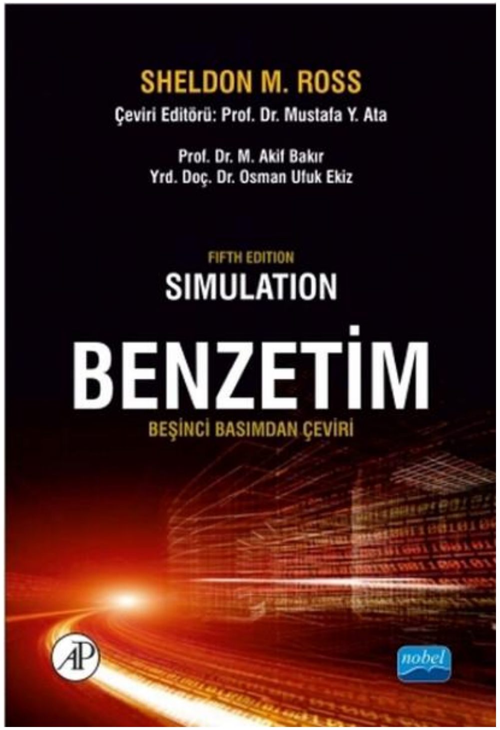
SAB311 – BENZETİM TEKNİKLERİ

Prof.Dr. Fatih TANK
Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi

Bu ders notları hazırlanırken
«Simulation (S.Ross)»
kitabının çevirisi olan
«Benzetim (M.Y.Ata, M.A.Bakır, O.U.Ekiz)»
kitabından yararlanılmıştır.





Bölüm 4
Kesikli Rasgele Değişkenlerin Üretilmesi

4.1 Ters Dönüşüm Yöntemi

Örnek 4a Eğer bir X rasgele değişkenini,

$$o_j = O\{X = j\} \quad \text{ve} \quad o_1 = 0.20, \quad o_2 = 0.15, \quad o_3 = 0.25, \quad o_4 = 0.40$$

olmak üzere üretmek istersek, U'yu üretir ve aşağıdaki işlemleri yaparız:

$$\begin{aligned}
&U < 0.20 \text{ ise,} \qquad X = 1 \text{ yap ve dur} \\
&U < 0.35 \text{ ise,} \qquad X = 2 \text{ yap ve dur} \\
&U < 0.60 \text{ ise,} \qquad X = 3 \text{ yap ve dur} \\
&\text{Aksi durumda, } X = 4 \text{ yap ve dur}
\end{aligned}$$

Örnek 4b Rasgele Dizilim Üretimi 1, 2,..., n sayılarının tüm $n!$ olası sıralanışlarının seçkisiz olduğu bir dizilimini üretmek istediğimizi düşünelim. Aşağıdaki algoritma, (bir sayının rasgele seçilmesi kalan sayıların her birisinin seçkisiz olarak seçilebileceği anlamında olduğu) önce 1, 2, . . . , n sayılarından birisini rasgele seçerek ve sonra onu n konumuna koyarak; sonra kalan n-1 sayıdan birisini rasgele seçip n-1 konumuna koyarak; sonra kalan $n-2$ sayıdan birisini rasgele seçip $n-2$ konumuna koyarak; ve böyle devam ederek bunu yapabilecektir. Ancak, konumlandırmak için tam olarak hangi sayıların kaldığını göz önüne almak zorunda olmadığımızdan, sayıları sıralı bir listede tutmak ve sonra sayının kendisi yerine sayının konumunu rasgele seçmek daha uygun ve etkin olur. Yani, her hangi bir $P_1, P_2, \ldots, P_n$ başlangıç sıralamasıyla başlayıp 1, . . . , n konumdan birisini rasgele çeker ve sonra bu konumdaki sayı ile n konumundaki sayının karşılıklı konumlarını değiştiririz. Sonra 1, . . . , $n-1$ konumdan birisini rasgele seçer ve bu konumdaki sayı ile n-1 konumundaki sayının karşılıklı konumlarını değiştirir, ve böyle devam ederiz.

Örnek 4c Ortalamaların Hesaplanması Varsayalım ki, $\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} a(i)/n$'nin yaklaşık değerini bulmak istiyoruz; ancak, n büyük, $a(i)$, $i = 1, \ldots, n$ değerleri karmaşık ve kolay hesaplanamıyor. Bunu yapmanın bir yolu $1, \ldots, n$ tamsayıları üzerinde X tekdüze dağılımlı bir rasgele değişkense, o zaman $a(X)$ rasgele değişkeninin

$$B[a(X)] = \sum_{i=1}^{n} a(i) O\{X = i\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a(i)}{n} = \overline{a}$$

biçiminde tanımlanan bir ortalaması olduğuna dikkat etmektir.

Örnek 4d o ölçümöteli rasgele geometrik değişkenin

$$O\{X = i\} = op^{i-1}, \quad i \geq 1, \qquad\qquad p = 1 - o$$

olduğunu anımsayalım.

Örnek 4e Bir Bernoulli Rasgele Değişkenler Ardışımı Üretme o ölçümöteli bağımsız ve aynı Bernoulli dağılımlı $X_1, \ldots, X_n$ rasgele değişkenlerini üretmek istediğimizi düşünelim. Bu, $U_1, \ldots, U_n$ rasgele değişkenleri üretilerek

$$X_i = \begin{cases} 1, & U \leq o_i \\ 0, & U > o_i \end{cases}$$

biçiminde kolayca yapılabilse de, şimdi daha etkin bir yaklaşım geliştireceğiz. Bunun için, bu değişkenlerin $X_i = 1$ olduğunda deneme i'nin başarıyla, aksi durumda başarısızlıkla sonuçlandığı ardışık deneme sonuçlarını gösterdiğini düşünün. $o \leqslant 1/2$ iken bu denemeleri üretmek için, geometrik rasgele değişken N'in değerini üretmede Örnek 4d'nin sonucunu kullanın, tüm denemelerin başarı olasılığı o olmak üzere, ilk başarının deneme sayısına eşitleyin. Varsayın ki, N'nin benzetilen değeri $N = j$'dir. Eğer $j > n$ ise, $X_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$; $j \leqslant n$ ise, $X_1 = \ldots = X_{j-1}$; ve $j < n$ ise, bu işlemi geri kalan $n - j$ tane Bernoulli değişkenin değerlerini elde etmek için yineleyin. ($o > 1/2$ olduğunda, eşanlı olarak olabildiğince fazla Bernoulli değişkeni üretmek istediğimizden, ilk başarınınki yerine ilk başarısızlığın deneme sayısını üretmeliyiz.)

Rasgele Sayıların Yeniden Kullanımına İlişkin Uyarı Bağımsız n tane denemenin sonucunu üretmek için biraz önce verilen yöntem her deneme için tekdüze bir rasgele değişken üretmekten daha etkin olup, tek bir rasgele sayıyı tüm n deneme sonuçlarını üretmede kullanılabilir. Böyle yapmak için, rasgele bir U üretilir ve

$$X_1 = \begin{cases} 1, & U \leq o_1 \\ 0, & U > o_1 \end{cases}$$

olarak alınır.

4.2 Poisson Rasgele Bir Değişkenin Üretilmesi

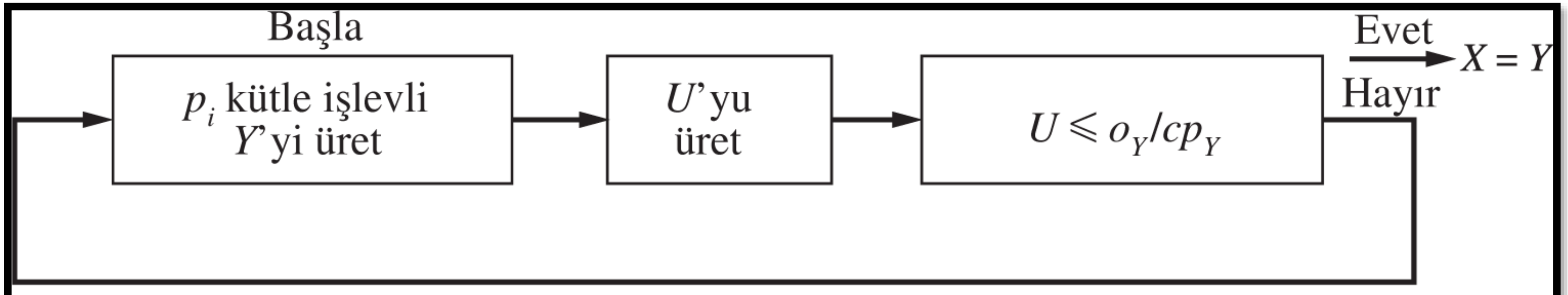
- Poisson olasılıkları gerektiğinde hesaplamak için yukarıdaki özyinelemin kullanılmasına dayalı olarak, λ ortalamalı rasgele bir Poisson rasgele değişkenin üretilmesindeki ters dönüşüm algoritması aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

4.3 İki-sanlı Rasgele Değişkenlerin Üretilmesi

İki-sanlı (n, p) Rasgele bir Değişkenin Üretilmesi için Ters Dönüşüm Algoritması

ADIM 1: Rasgele bir U sayısı üret.
ADIM 2: $c = o/(1\text{-}o)$, $i = 0$, $o' = (1\text{-}o)^n$, $F = \text{pr}$.
ADIM 3: Eğer $U < F$ ise $X = i$ yap ve dur.
ADIM 4: $\text{pr} = [c(n - i)/(i + 1)]\,\text{pr}$, $F = F + \text{pr}$, $i = i + 1$.
ADIM 5: Adım 3'e git.

4.4 Kabul-Red Tekniği



Şekil 4.1. Kabul-red

Red Yöntemi

ADIM 1: p_j olasılık kütle işlevli Y'nin benzetimini yap.
ADIM 2: Rasgele bir U sayısı üret.
ADIM 3: Eğer $U < o_Y/cp_Y$ ise, $X = Y$ yap ve dur. Aksi durumda Adım 1'e dön.

Örnek 4f Varsayalım ki, sırasıyla 0.11, 0.12, 0.09, 0.08, 0.12, 0.10, 0.09, 0.09, 0.10, 0.10 olasılıklı 1,2,...,10 değerlerinden birini alan rasgele bir X değişkeninin benzetimini yapmak istiyoruz. Ters dönüşüm yöntemini kullanmak bir seçenekse, diğer bir yaklaşım da 1,...,10 üzerinde kesikli tekdüze p yoğunluğuyla red yöntemini kullanmaktır. Yani, $p_j = 1/10$, $j = 1,\ldots, 10$. $\{p_j\}$'nin bu seçeneği için, c

$$c = \text{enb} \frac{o_j}{p_j} = 1.2$$

seçilebilir ve buna göre algoritma aşağıdaki gibi olabilir:

ADIM 1: Rasgele bir U_1 sayısı üret ve $Y = \lfloor 10U_1 \rfloor + 1$ yap.
ADIM 2: İkinci bir rasgele U_2 sayısı üret.
ADIM 3: $U_2 \leq o_Y/.12$ ise $X = Y$ yap ve dur. Aksi durumda Adım 1'e dön.

4.5 Karışım Yaklaşımı

Örnek 4g Varsayalım ki,

$$o_j = O\{X = j\} = \begin{cases} 0.05 & j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0.15 & j = 6, 7, 8, 9, 10 \end{cases}$$

olacak biçimde rasgele bir X değişken değeri üretmek istiyoruz. Bunu,

$$o_j^{(1)} = 0.1, \quad j = 1, \ldots, 10 \quad \text{ve} \quad o_j^{(2)} = \begin{cases} 0 & j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0.2 & j = 6, 7, 8, 9, 10 \end{cases}$$

olmak üzere, $o_j = 0.5\,o_j^{(1)} + 0.5\,o_j^{(2)}$ olacağını göz önüne alarak, önce rasgele bir U sayısı üretip $U < 0.5$ ise 1, . . . , 10 üzerinde kesikli tekdüzeden, değilse 6, 7, 8, 9, 10 üzerinde kesikli tekdüzeden üreterek yapabiliriz. Yani, X'in benzetimini aşağıdaki gibi yapabiliriz:

ADIM 1: Rasgele bir U_1 sayısı üret.
ADIM 2: İkinci bir rasgele U_2 sayısı üret.
ADIM 3: Eğer $U_1 < 0.5$ ise, $X = \lfloor 10U_2 \rfloor + 1$ yap. Değilse,
$X = \lfloor 5U_2 \rfloor + 6$ yap. □

4.6 Kesikli Rasgele Değişkenlerin Üretilmesi için Bir Başka Yöntem

Temel Teorem $O = \{O_i, i = 1, \ldots, n\}$ bir olasılık kütle işlevini göstersin. O zaman

(a) $O_i < 1/(n-1)$ olacak biçimde bir i, $1 \leqslant i \leqslant n$ ve
(b) $O_i + O_j \geqslant 1/n - 1$ olacak biçimde bu i için, bir a_j, $j \neq i$ vardır.

(4.4)'teki gösterimin elde edilmesindeki genel tekniğe geçmeden önce, bunu bir örnekle gösterelim.

4.7 Rasgele Yöneylerin Üretilmesi

Örnek 4i Her biri, sırasıyla $o_1, o_2, \ldots, o_r$, $\sum_{i=1}^{r} o_i = 1$ olasılıklarıyla $1, 2, \ldots, r$ çıktılarından biriyle sonuçlanan n tane bağımsız denemeyi göz önüne alın. Eğer i çıktısıyla sonuçlanan denemelerin sayısı X_i ile gösterilecek olursa, o zaman $(X_1, \ldots, X_n)$ yöneyinin çok-sanlı rasgele bir yöney olduğu söylenir. Ortak olasılık kütle işlevi de

$$O\{X_i = x_i, i = 1, \ldots, r\} = \frac{n!}{x_1! \cdots x_r!} o_1^{x_1} \cdots o_r^{x_r}, \quad \sum_{i=1}^{r} x_i = n$$

biçiminde verilir.