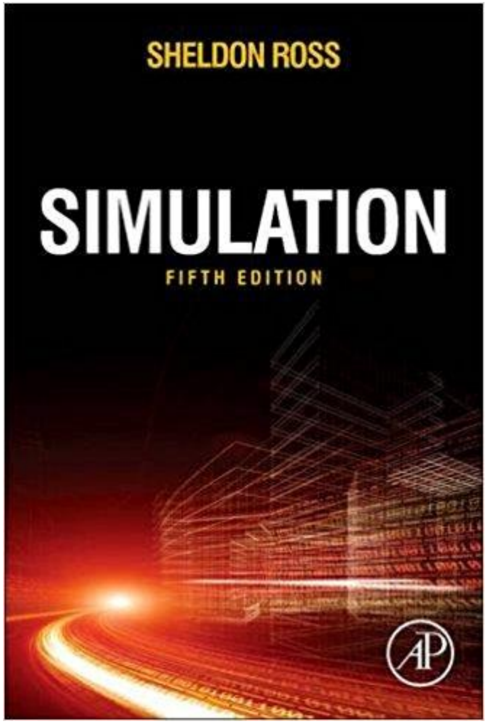
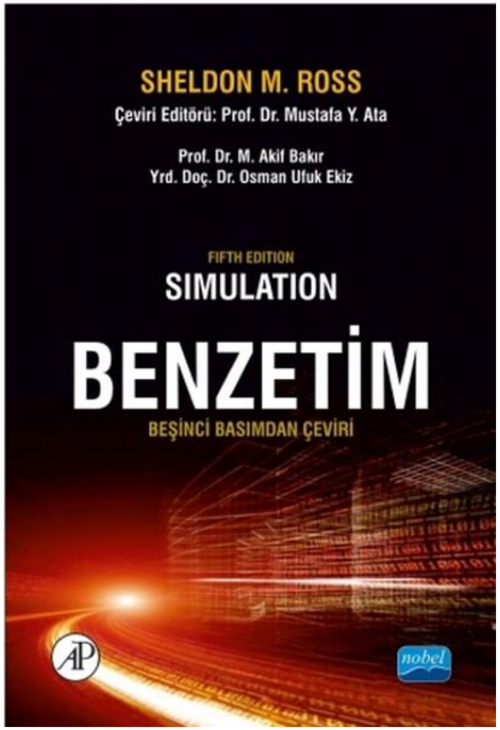
# SAB311 – BENZETİM TEKNİKLERİ

**Prof.Dr. Fatih TANK**
**Ankara Üniversitesi**
**Uygulamalı Bilimler Fakültesi**

Bu ders notları hazırlanırken
«Simulation (S.Ross)»
kitabının çevirisi olan
«Benzetim (M.Y.Ata, M.A.Bakır, O.U.Ekiz)»
kitabından yararlanılmıştır.



# Bölüm 5
# Sürekli Rasgele Değişkenlerin Üretilmesi

# Giriş

Kesikli rasgele bir değişkenin üretilmesindeki her yöntemin süreklilik durumunda da bir benzeri vardır. Sürekli rasgele değişkenlerin üretilmesindeki ters dönüşüm ve red yaklaşımlarını Kısım 5.1 ve 5.2'de sunacağız. Kısım 5.3'te, normal rasgele değişkenlerin üretilmesi için, kutupsal yöntem olarak bilinen daha güçlü bir yaklaşımı ele alacağız. Son olarak, Kısım 5.4 ve 5.5'te Poisson ve türdeş olmayan Poisson süreçlerini üretme sorununu ele alacağız.

# 5.1 Ters Dönüşüm Yöntemi

**Örnek 5a** Varsayalım ki,

$$F(x) = x^n, \quad 0 < x < 1$$

dağılımına sahip rasgele bir $X$ değişkeni üretmek istiyoruz.

Eğer $x = F^{-1}(u)$ olarak alırsak, o zaman

$$u = F(x) = x^n \text{ ya da, buna denk biçimde, } x = u^{1/n}$$

olur. Dolayısıyla rasgele bir $U$ sayısı üretip $X = U^{1/n}$'da yerine koyarak böyle rasgele bir değişkeni üretebiliriz.

Aşağıdaki örnekten anlaşılacağı üzere, ters dönüşüm yöntemi üstel rasgele değişkenlerin üretilmesinde güçlü bir yöntem sağlar.

**Örnek 5b** Eğer sıklıklığı 1 olan üstel rasgele bir değişken $X$ ise, o zaman dağılım işlevi

$$F(x) = 1 - e^{-x}$$

ile verilir. Eğer $x = F^{-1}(u)$ olarak alınırsa, o zaman

$$u = F(x) = 1 - e^{-x}$$

ya da

$$1 - u = e^{-x}$$

ya da logariması alınarak

$$x = -\log(1 - u)$$

elde edilir. Bu şekilde rasgele bir $U$ sayısı üretip

$$X = F^{-1}(U) = -\log(1 - U)$$

yaparak ölçümöte değeri 1 olan bir üstel üretebiliriz. 1-$U$'nun da (0, 1) üzerinde tekdüze ve böylece –log(1-$U$)'nun-log$U$ ile aynı dağılımlı olduğu dikkate alınarak hesaplama süresinde küçük bir tasarruf sağlanabilir. Yani, rasgele bir sayının negatif logaritması, 1 sıklıklığıyla üstel dağılır.

Ek olarak, eğer $X$ ortalaması 1 olan bir üstelse, her hangi pozitif bir $c$ sabiti için, $cX$ ortalaması $c$ olan bir üsteldir. Buna göre, λ sıklıklı (1/λ ortalamalı) üstel bir rasgele değişken rasgele bir $U$ sayısı üretilip

$$X = -\frac{1}{\lambda} \log U \qquad \square$$

alınarak üretilebilir.

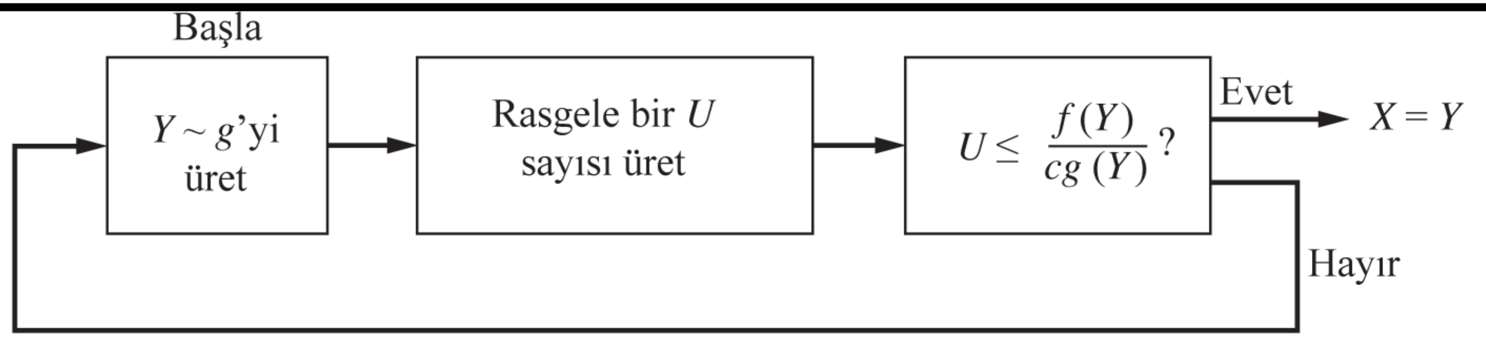
**Örnek 5c** Bir gama $(n, \lambda)$ rasgele değişkeninin değerini üretmek istediğimizi varsayalım. Böyle bir rasgele değişkenin dağılım işlevi $F$

$$F(x) = \int_0^x \frac{\lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{n-1}}{(n-1)!}\, dy$$

olduğundan, tersi için kapalı biçimde bir ifade bulmak olası değildir. Ancak, bir gama$(n, \lambda)$ rasgele değişkeninin, her biri $\lambda$ sıklıklı $n$ tane bağımsız üstelin toplamı olarak görülebileceği sonucunu kullanarak (Bölüm 2, Kısım 2.9'a bakınız), $X$'i üretmek için Örnek 5b'den yararlanabiliriz. Özel olarak, bir gama $(n, \lambda)$ değişkenini, $n$ tane $U_1, \ldots, U_n$ rasgele sayılarını üretip, hesaplama süresinde tasarruf sağlayıcı, $n$ tane yerine yalnızca bir logaritmik hesaplama gerektiren $\sum_{i=1}^{n} \log x_i = \log(x_1 \cdots x_n)$ özdeşliğinin kullanılacağı,

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{\lambda}\log U_1 - \cdots - \frac{1}{\lambda}\log U_n \\ &= -\frac{1}{\lambda}\log(U_1 \cdots U_n) \end{aligned}$$

biçiminde üretebiliriz. □




**Şekil 5.1.** $f$ yoğunluklu rasgele bir $X$ değişkeninin benzetimi için red yöntemi.

# 5.2 Red Yöntemi

**Örnek 5d** Red yöntemini

$$f(x) = 20x(1-x)^3, \quad 0 < x < 1$$

yoğunluklu rasgele bir değişkenin üretilmesinde kullanalım.

Bu (2 ve 4 ölçümöteleriyle bir beta olan) rasgele değişken (0, 1) aralığında yoğunlaştığından, red yöntemini

$$g(x) = 1, \quad 0 < x < 1$$

ile ele alalım. $f(x)/g(x) \leq c$ olacak biçimde en küçük $c$ değerini belirlemek için, matematik hesaplama ile

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 20x(1-x)^3$$

işlevinin en büyük değeri belirlenir. Bu işlevin türevi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 20\left[(1-x)^3 - 3x(1-x)^2\right]$$

biçiminde alınır ve 0'a eşitlenirse, en büyük değere $x = 1/4$ noktasında eriştiği ve böylece

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 20\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{135}{64} \equiv c$$

olduğu görülür. Buna göre,

$$\frac{f(x)}{cg(x)} = \frac{256}{27}x(1-x)^3$$

olur ve dolayısı ile red yöntemi aşağıdaki gibidir:

ADIM 1: Rasgele $U_1$ ve $U_2$ sayılarını üret.
ADIM 2: $U_2 \leqslant \frac{256}{27}U_1(1-U_1)^3$ ise dur ve $X = U_1$ yap. Aksi durumda Adım 1'e dön.

Adım 1'in ortalama yinelenme sayısı $c = \frac{135}{64} \approx 2.11$'dir. □

**Örnek 5g** Varsayalım ki değeri 5'ten fazla olma koşuluyla rasgele bir gama(2,1) değişkeni üretmek istiyoruz. Yani, kısımlanarak tümlevin hesaplandığı

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{\int_5^\infty xe^{-x}dx} = \frac{xe^{-x}}{6e^{-5}}, \quad x \geqslant 5$$

olasılık yoğunluğuna sahip rasgele bir değişken üretmek istiyoruz. Bir gama(2,1) rasgele değişkenin beklenen değeri 2 olduğundan, en az 5 olmaya koşullu ortalaması 2 olan bir üstele dayalı olarak red yöntemini kullanacağız. Yani,

$$g(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{-x/2}}{e^{-5/2}}, \quad x \geqslant 5$$

yoğunluğunu kullanacağız. Buna göre,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^{5/2}}{3}xe^{-x/2}, \quad x \geqslant 5$$

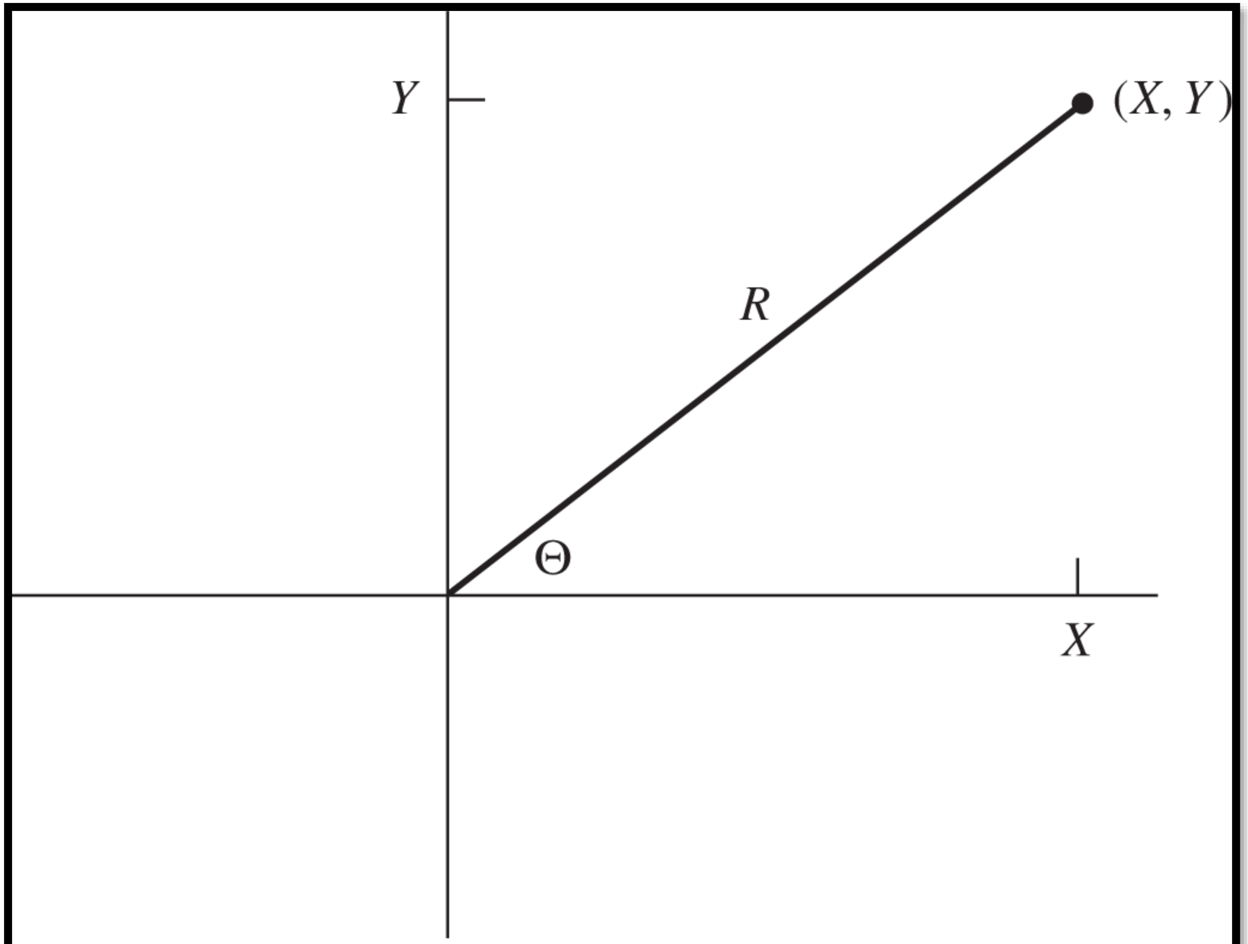
olur. $x \geqslant 5$ olduğunda, $xe^{-x/2}$ $x$'in azalan bir işlevi olduğundan, algoritmada gerekli yineleme sayısı

$$c = \underset{x \geqslant 5}{\text{enb}} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \frac{f(5)}{g(5)} = 5/3$$

Devam ediyor

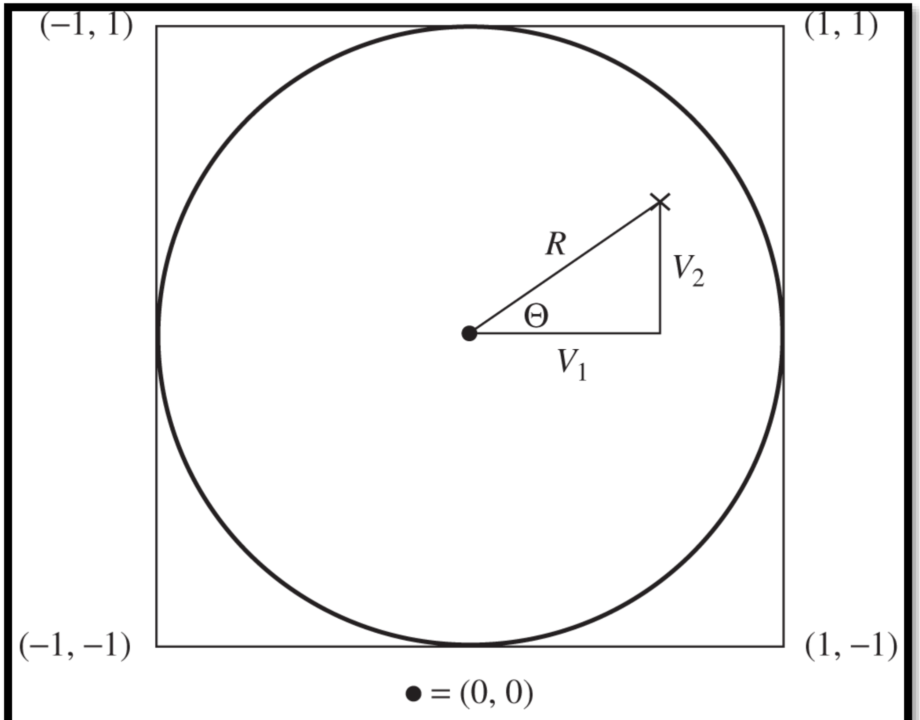
ortalamalı geometriktir. 5'ten büyük olmaya koşullu 1/2 sıklıklı bir üstel üretmek için, 5'i aşan miktarının (üstel değişkenlerin belleksiz olma özelliğinden) yine 1/2 sıklıklı bir üstel olduğu gerçeğini kullanırız. Dolayısı ile, eğer $X$ 1/2 sıklıklı bir üstelse, $5 + X$ de $X$'in 5'ten büyük olmasına koşullu olduğu aynı dağılıma sahiptir. Bundan dolayı, $f$ yoğunluklu rasgele bir $X$ değişkenin benzetimini yapmak için aşağıdaki algoritmaya sahibiz.

ADIM 1: Rasgele bir $U$ sayısı üret.
ADIM 2: $Y = 5 - 2\log(U)$ olsun.
ADIM 3: $U \leqslant \frac{e^{5/2}}{5} Y e^{-Y/2}$ ise, $X = Y$ yap ve dur. Aksi durumda Adım 1'e dön. □




**Şekil 5.2.** Kutupsal koordinatlar.

# 5.3 Normal Rasgele Değişkenlerin Üretilmesi İçin Kutupsal Yöntem




**Şekil 5.3.** Kare içinde Tekdüze Dağılımlı $(V_1, V_2)$

# 5.4 Poisson bir Sürecin Üretilmesi

**Sıklığı λ olan Poisson bir Sürecin İlk T Zaman Birimlerinin Üretilmesi**

ADIM 1: $t = 0$, $I = 0$.

ADIM 2: Rasgele bir $U$ sayısı üret.

ADIM 3: $t = t - \frac{1}{\lambda} \log U$. $t > T$ ise dur.

ADIM 4: $I = I + 1$, $S(I) = t$.

ADIM 3: Adım 2'ye dön.

# 5.5 Türdeş Olmayan Poisson bir Sürecin Üretilmesi

**Türdeş Olmayan Poisson bir Sürecin İlk T Zaman Birimlerinin Üretilmesi**

ADIM 1: $t = 0$, $I = 0$.
ADIM 2: Rasgele bir $U$ sayısı üret.
ADIM 3: $t = t - \frac{1}{\lambda} \log U$. $t > T$ ise, dur.
ADIM 4: Rasgele bir $U$ sayısı üret.
ADIM 5: $U \leqslant \lambda(t)/\lambda$ ise, $I = I + 1$, $S(I) = t$.
ADIM 6: Adım 2'ye git.

## Türdeş Olmayan Poisson bir Sürecin İlk T Zaman Birimlerinin Üretilmesi

ADIM 1: $t = 0$, $J = 1$, $I = 0$.
ADIM 2: Rasgele bir $U$ sayısı üret ve $X = \frac{-1}{\lambda_J} \log U$ yap.
ADIM 3: $t + X > t_J$ ise, dur.
ADIM 4: $t = t + X$.
ADIM 5: Rasgele bir $U$ sayısı üret.
ADIM 6: $U \leqslant \lambda(t)/\lambda_J$ ise, $I = I + 1$, $S(I) = t$.
ADIM 7: Adım 2'ye git.
ADIM 8: $J = k + 1$ ise dur.
ADIM 9: $X = (X - t_J + t)\lambda_J/\lambda_{J+1}$, $t = t_J$, $J = J + 1$.
ADIM 10: Adım 3'e git.

**Örnek 5h** Her hangi pozitif bir $a$ sabiti için $\lambda(t) = 1/(t + a)$, $t \geqslant 0$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$\int_0^x \lambda(s+y)dy = \int_0^x \frac{1}{s+y+a}\,dy = \log\left(\frac{x+s+a}{s+a}\right)$$

ve dolayısıyla, Denklem (5.8)'den

$$F_s(x) = 1 - \frac{s+a}{x+s+a} = \frac{x}{x+s+a}$$

olur.

Devam ediyor

Bunun tersi, $x = F_s^{-1}(u)$'ya göre,

$$u = F_s(x) = \frac{x}{x+s+a}$$

ya da,

$$x = \frac{u(s+a)}{1-u}$$

olur. Yani,

$$F_s^{-1}(u) = (s+a)\,\frac{u}{1-u}$$

olur. Dolayısı ile, $U_1, U_2, \ldots$ rasgele sayılarını üretip sonra da özyinemeli biçimde

$$S_1 = \frac{aU_1}{1-U_1}$$

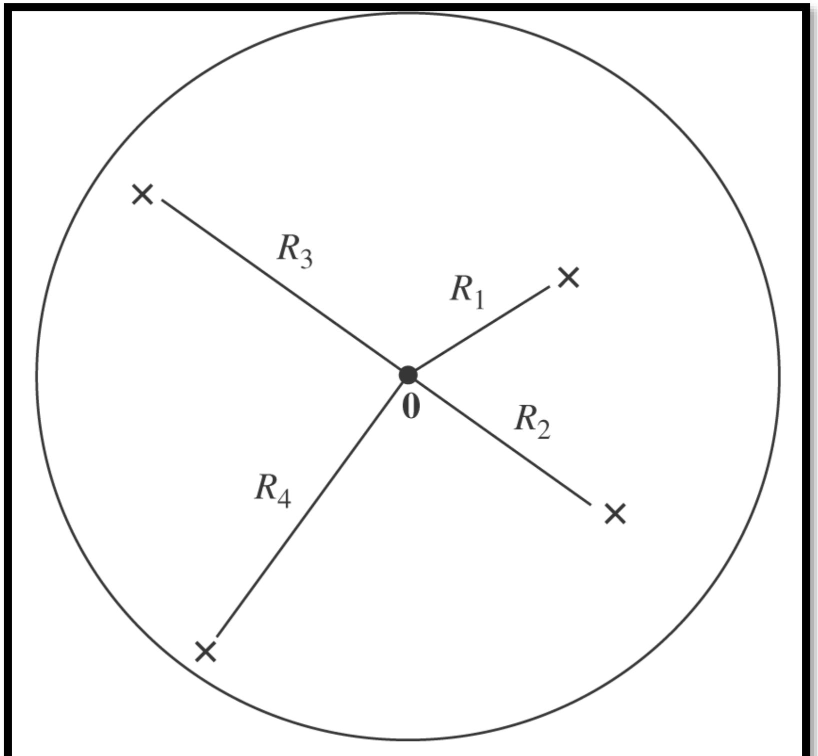
$$S_2 = S_1 + (S_1 + a)\frac{U_2}{1-U_2} = \frac{S_1 + aU_2}{1-U_2}$$

ve genel olarak,

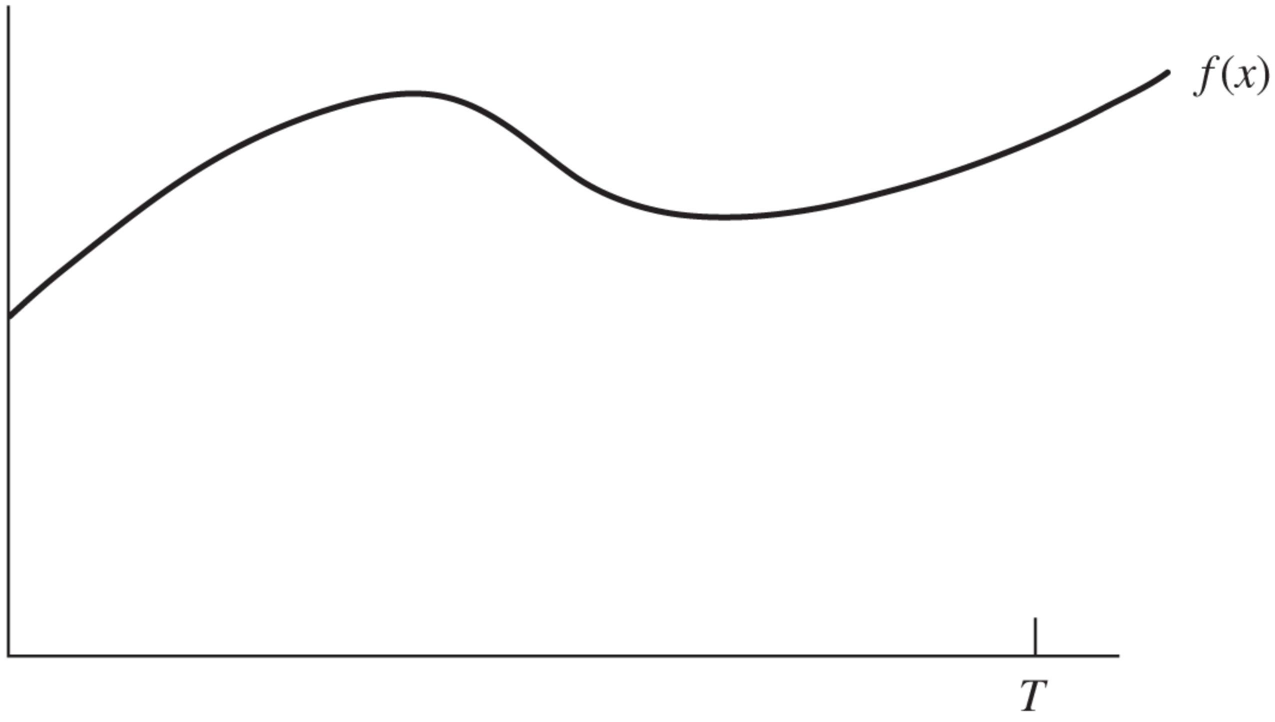
$$S_j = S_{j-1} + (S_{j-1} + a)\,\frac{U_j}{1-U_j} = \frac{S_{j-1} + aU_j}{1-U_j}, \quad j \geqslant 2 \qquad \square$$

değerlerinin hesaplanmasıyla ardışık $S_1, S_2, \ldots$ olay zamanlarını üretebiliriz. $\square$

# 5.6 İki Boyutlu Poisson bir Sürecin Üretilmesi




**Şekil 5.4.** İki Boyutlu Poisson Süreç.




**Şekil 5.5.** *f*'nin grafiği