Yıldızların Yapısı ve Evrimi

Hidrostatik Denge

Bu Derste Ne Öğreneceğiz

Yıldızların yapısını belirleyen süreçlerin neler olduğunu ve bu süreçleri anlamak için hangi denklemlerin çözülmesi gerektiğini inceleyeceğiz.

Kuramcılar iyi gözlenmiş bir yıldızın özelliklerini hesaplamazlar.

Kütle, kimyasal yapı ve yıldız yaşının bir dizi değerleri için hesap yapılır ve sonuçlar bireysel yıldızın özellikleri yerine yıldızların genel özellikleri karşılaştırılır.

Bu Derste Ne Öğreneceğiz

Yapılan hesaplar sonucunda yıldızın yüzey özellikleri bulunur. Çünkü gözlenen yüzey sıcaklığı ve yarıçap, hesapla bulunan ile karşılaştırılır.

İç yapıyı belirleyen denklemleri çözmeden bu parametreleri hesaplamak olanaksızdır.

Böylece yıldızın içindeki katmanlarda fiziksel koşulları da öğrenebiliriz.

Yıldızdan bize sadece yüzeyden çıkan ışınlar da gelmez, Güneş'ten nötrino gelir.

Bu Derste Ne Öğreneceğiz

Yıldızlar birer gaz kütlesi, nasıl bir arada duruyor? Çekim kuvveti sayesinde. O zaman neden içine çökmüyor?

Buna karşı duran yıldız maddesinin basınç kuvvetidir. Neden soluduğumuz yer atmosferi yer yüzüne çökmüyor?

Bu iki kuvvet yıldız yapısını belirlemede önemli rol oynarlar. Yıldızların özellikleri gözlenenden daha hızlı değişmiyorsa bu iki kuvvet birbirini dengelemelidir.

Bu Derste Ne Öğreneceğiz

Yıldızlar uzaya çevrelerinden daha soğuk olduğu için sürekli enerji salmaktadır.

Eğer yıldız gözlenenden daha çabuk soğumayacaksa bu enerji sürekli olmalı.

İçyapı hesaplamada zaman kavramı da önemlidir. Örneğin çekim ve basınç kuvvetleri birbirini dengeleyemezse yıldız bir t_d zamanında ya büzülür ya da genişler. Bu zamana dinamik zaman ölçeği diyeceğiz.

Bu Derste Ne Öğreneceğiz

Isısal zaman ölçeği (t_{th}) ise bir yıldızın toplam ısısal enerjisinin, yüzeyinden birim zamanda kaybettiği enerjiye oranı olarak tanımlanır.

Yıldızın temel enerji kaynağı çekirdekteki nükleer tepkimelerdir. Yıldızın toplam enerji kaynaklarının, birim zamandaki enerji kaybına oranı nükleer zaman ölçeği (t_n) olarak tanımlanır.

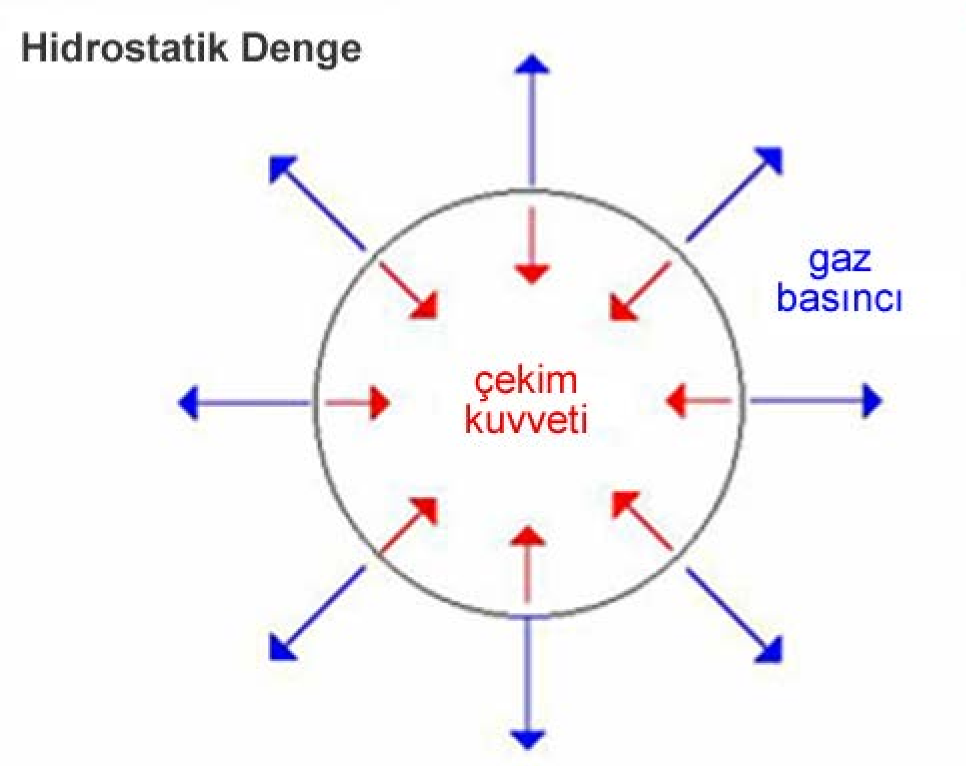
$$t_d \ll t_{th} \ll t_n$$

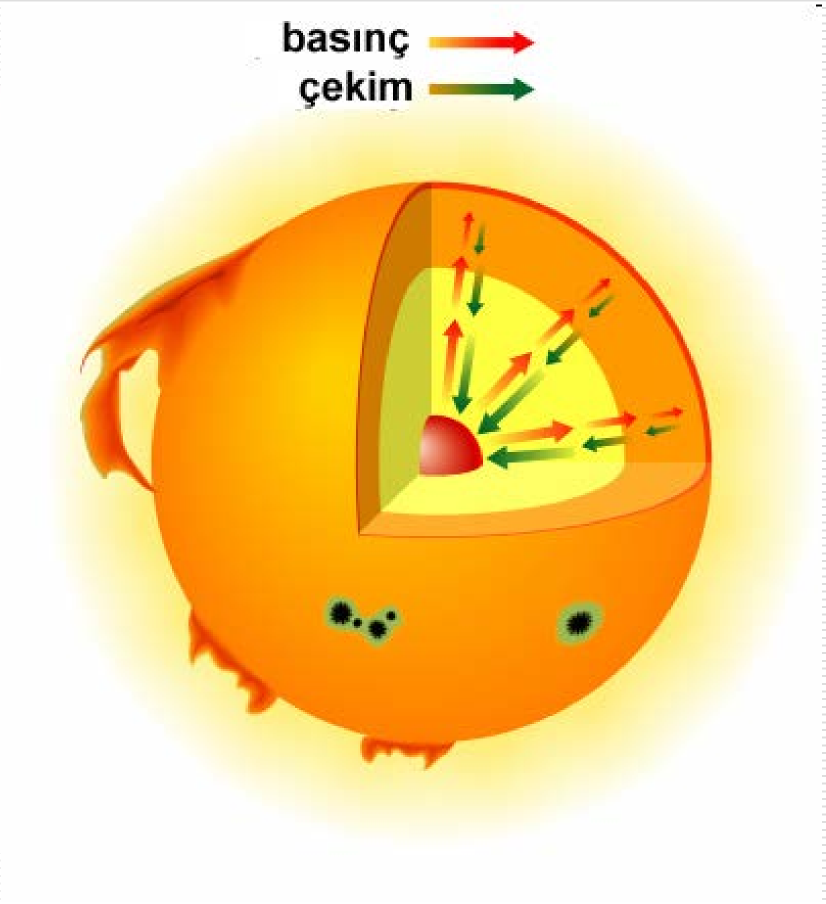
Bu Derste Ne Öğreneceğiz

Bu eşitsizlik farklı tüm yıldızlar için doğrudur ve yapı denklemlerini çözerken bize yardımcı olurlar.

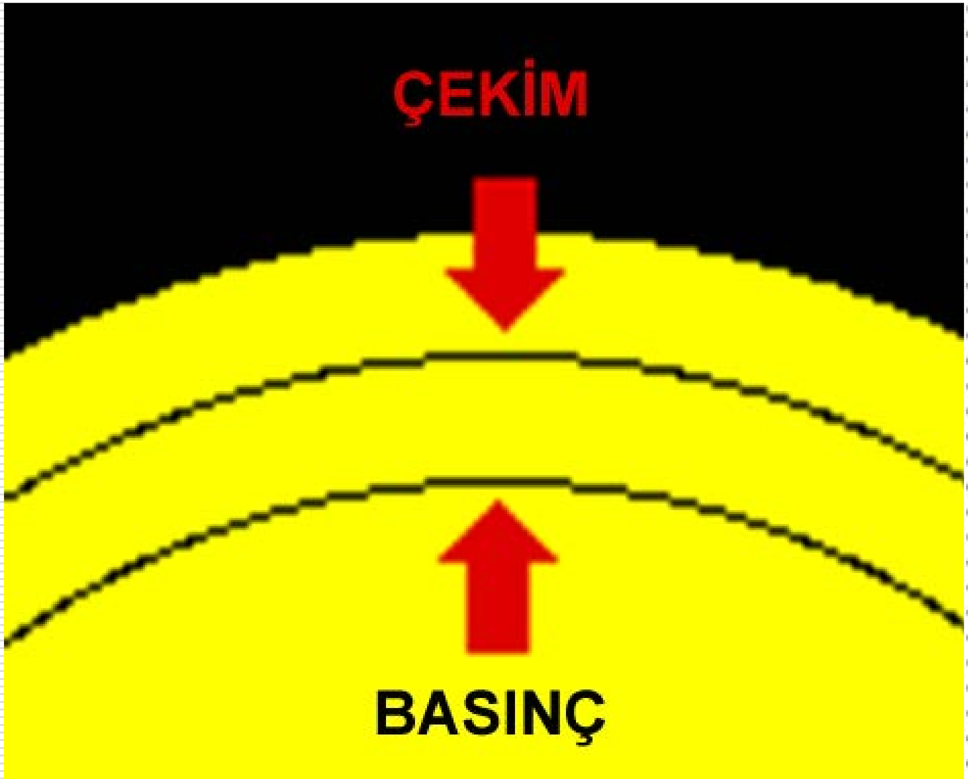
Yapı denklemlerini çözerken iki temel varsayım yapılır. Birincisi yıldızlar evrimleri sırasında özelliklerini değiştiririrler. Burada değişim hızı önemsenmez, hemen değiştiği varsayılır. İkinci varsayım yıldızlar küreseldir ve merkeze göre simetriktir. O zaman tüm parametreler r’ye bağlıdır.

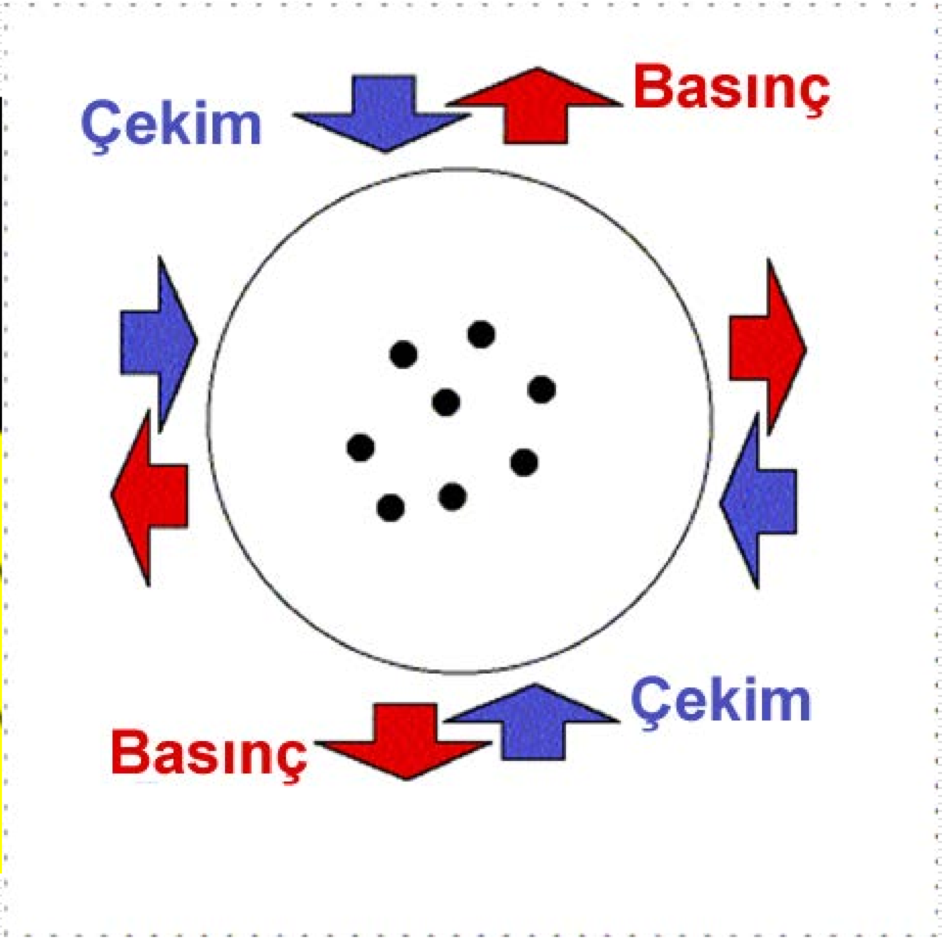
Hidrostatik Denge





Hidrostatik Denge





Hidrostatik Denge

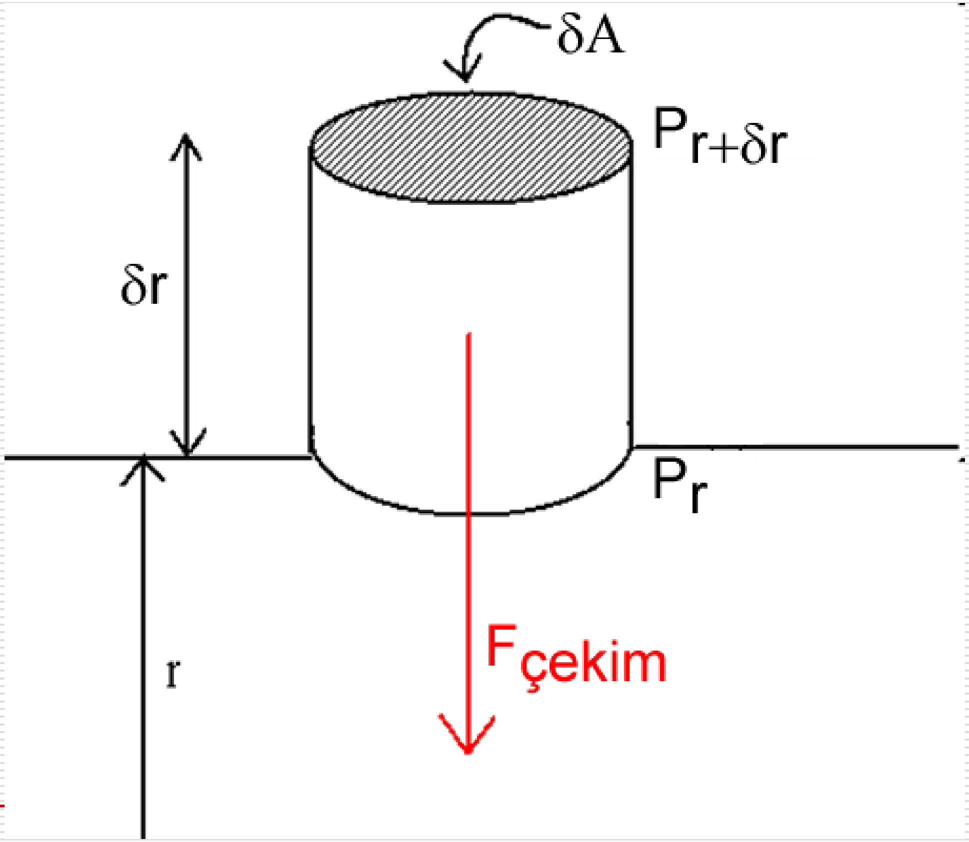
Yıldız içinde silindir şeklinde küçük bir hacım elementi alalım.

Boyu δr

Alanı δA

Yıldız merkezinden uzaklığı r olsun

Silindirin alt tabanındaki basıncı P_r üsttekini de $P_{r+\delta r}$ gösterelim.



Çekim Kuvveti

Bu silindirin özellikleri ise

Yoğunluk = ρ_r

Hacım = $\delta r\ \delta A$

Kütle = δm = $\rho_r\ \delta r\ \delta A$

Bu silindir üzerine etki eden çekim kuvveti

$$F_{çekim} = -\frac{G\,M_r\,\delta m}{r^2} \qquad F_{çekim} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho_r\,\delta r\,\delta A$$

Burada unutmayalım ρ_r yıldız maddesinin r yarıçapındaki yoğunluğudur. M_r ise r yarıçaplı küre içindeki kütledir.

Çekim Kuvveti

Şimdi bu silindirin bulunduğu yerdeki çekim ivmesini yazalım.

$$g_r = \frac{GM_r}{r^2}$$

Bu ifadeyi çekim kuvvetinde yerine koyalım

$$F_{çekim} = -g_r \rho_r \delta r \delta A$$

Çekim kuvvetini ne dengeleyecektir?

BASINÇ

Basınç

Silindirin üst yüzeyine uygulanan basınç P(r+dr), aşağı doğru bir kuvvet uygular ve alt yüzeyine uygulanan basınç ise P(r), yukarı doğru bir kuvvet uygular. Net basınç ise,

$$Net\ Basınç = P_{r+\delta r} - P_r = (dP_r / dr)\,\delta r$$

Bu basınç ile ilişkili kuvvetin tanımı

Kuvvet = Basınç * Alan olduğuna göre

$$F_{basınç} = ((dP_r / dr)\delta r)\,\delta A$$

Denge...

Bu iki kuvvet dengede olması gerekiyor.

$$F_{basınç} = F_{çekim}$$

$$(dP_r \,/\, dr)\,\delta r\,\delta A = -g_r\,\rho_r\,\delta r\,\delta A$$

Basit matematik işlemlerden sonra Hidrostatik denge denklemi elde edilir.

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\rho_r g_r \qquad veya \qquad \frac{dP}{dr} = -\frac{G\,M_r\,\rho_r}{r^2}}$$

Parametrelerden r indisini kaldıralım.

Diğer Kuvvetler

Hidrostatik denge formülünü çıkarırken başka kuvvetlerin olmadığını varsaydık. Ama biliyoruz ki var.

1. Dönmeden kaynaklanan merkezkaç kuvvet erken tür yıldızlarda etkilidir.
2. Bazı yıldızlarda manyetik kuvvetler çok etkindir. Örneğin tuhaf (peculiar) yıldızlar. Ap ve Bp yıldızları.
3. Büyük kütleli yıldızlarda ışınım basıncı etkilidir.

Kütlenin Sürekliliği

Buradaki üç parametre M, ρ ve r birbirlerinden bağımsız değildir. Örneğin r yarıçaplı bir küre içindeki M kütlesi yine aynı küre içindeki yoğunlukla ifade edilir.

r ve r+δr yarıçapları arasında kalan küresel kabuğun kütlesi δr küçük olma koşuluyla $\rho 4\pi r^2 \delta r$ dir. $M_r+\delta r$ ile M_r arasındaki farka eşittir ve ince kabuk için

$$M_{r+\delta r} - M_r = (dM/dr)\,\delta r$$

Kütlenin Sürekliliği

Küresel kabuğun kütlesi için bu iki ifadeyi eşitlersek

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \qquad \text{veya} \qquad M_r = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_{r'}\, dr'$$

Bu ikinci yapı denklemidir. Bunlar P, M ve r parametrelerini içeren r cinsinden iki diferensiyel denklemdir. Eğer bu parametreleri saptamak istiyorsak bir bağıntıya daha gereksinme duyarız.

Basınç Yaratan Nedir?

Hidrostatik denge denklemi bir yıldızın içyapısında çekimsel büzülmeyi basıncın nasıl önlediğini göstermektedir.

Peki basıncı yaratan nedir? İdeal gaz denklemi. Bu aynı zamanda aradığımız üçüncü bağıntıdır. Bu denklem basıncı yoğunluğa bağlar. Fakat bir parametre daha işin içine girer, sıcaklık, o zaman...

$$P_{gaz} = nkT = \frac{\rho kT}{m}$$

Denge Denkleminin Doğruluğu

Eğer ele alınan kütle elementine etkiyen kuvvetler dengede değilse o zaman bu elemente etkiyen net kuvvet, elementin kütlesi ile ivmesinin çarpımına eşittir. Eğer ivme dik doğrultuda içe doğru tanımlanırsa

$$F = \delta m\, a = \rho_r\, \delta A \delta r\ a$$

$$F_{basınç} = F_{çekim}$$

$$(dP_r / dr)\, \delta r\, \delta A = -g_r\, \rho_r\, \delta r\, \delta A$$

$$(dP_r / dr)\, \delta r\, \delta A + g_r\, \rho_r\, \delta r\, \delta A = \rho_r \delta A \delta r\ a$$

Denge Denkleminin Doğruluğu

Burada her iki tarafta sadeleştirme yap..

$$(\delta P_r / \delta r) + g_r \rho_r = \rho_r \; a$$

Burada parçalı türev kullanılmıştır, çünkü artık P hem r'nin hem de T'nin fonksiyonudur. Bu ifade hidrostatik denge denkleminin genel halidir. Sol taraftaki kuvvetlerin toplamı kütle çekiminin bir λ kesri kadar olsun

$$\lambda \, g_r \, \rho_r = \rho_r \, a$$

Denge Denkleminin Doğruluğu

O zaman element içe doğru ivmelenme vardır.

$$a = \lambda g_r$$

Bu ivmelenme sonucu t zamanında S kadar yol alacaktır.

$$S = \frac{1}{2}\lambda g_r t^2$$

Bir yıldızın yarıçapının %10 değişmesi için t ne olmalıdır?

Denge Denkleminin Doğruluğu

$$t = \sqrt{\frac{r}{5\lambda g}}$$

Güneş yüzeyinde r=7*10^8 m ve g=2.5*10^2 m/sn^2 dir. Buradan

$$t \cong 10^3 / \lambda^{\frac{1}{2}}\ sn$$

Bir takım jeolojik kanıtlar güneş özelliklerinin 10^9 (3*10^{16} sn) yıldır önemli derecede değişmediğini göstermektedir. O zaman $\lambda=10^{-27}$ ‘den büyük olamaz.

Denge Denkleminin Doğruluğu

O zaman hidrostatik denge denkleminin ne kadar doğru olduğunu görüyoruz. Bir kaç saatde önemli değişiklikler gözlenen yıldızlarda ise denklemin genelleştirilmiş hali kullanılmalıdır.

Basınç kuvvetlerinin ihmal edildiği durumda yani S=r ve λ=1 bir yıldızın ne kadar zamanda çökebileceğini buluruz.

Dinamik zaman ölçeği

$$\boxed{t_d = \sqrt{\frac{2r^3}{GM}}}$$

Küresel Simetri Varsayımı

Sıvı ve gaz cisimler döndüklerinde basıklaşırlar. Dönmenin önemi. Ekvator yöresinde yüzeyde küçük bir hacım elementi alalım. Basınç ve çekim kuvvetine ek olarak dışa doğru merkezkaç kuvvet ($m\omega^2 R$) etki eder. Bu kuvveti çekim kuvveti ile karşılaştıralım. Eğer

$$\frac{m\omega^2 R}{(GMm/R^2)} \ll 1$$

ise bu ihmal edilebilir bir kuvvettir.

Küresel Simetri Varsayımı

Aynı ifadeyi şu şekilde de gösterebiliriz.

$$\omega^2 \ll \frac{GM}{R^3}$$

Bu eşitsizlik sağlandığı sürece küresel simetri var demektir. Bu bağıntı dinamik zaman ölçeği ile çok yakından ilgilidir.

$$t_d = \left(\frac{2r^3}{GM}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{veya} \quad \frac{GM}{r^3} = \frac{2}{t_d^2} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 << \frac{2}{t_d^2}$$

Küresel Simetri Varsayımı

Açısal hız $\omega = 2\pi/P$ ‘dir. Burada P dönme dönemi. Eğer küresel simetri korunuyorsa

$$\omega^2 << \frac{2}{t_d^2} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \ll \frac{2}{t_d^2} \Rightarrow P \gg t_d$$

Güneş durumunda dönmenin etkisi çok düşüktür. Dönme dönemi yaklaşık bir aydır (P=27*3600 sn). Dinamik zaman ölçeği ise,

$$t_d \approx 2000\, sn$$

Merkezdeki Basınç

Önce bir yaklaşım ile çözelim.

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{G\,M_r\,\rho_r}{r^2}}$$

$$\frac{dP}{dr} \approx -\frac{P_{merkez} - P_{yüzey}}{R_{merkez} - R_{yüzey}} = -\frac{P_{merkez}}{R_{güne}} = \frac{G * M * (M_{güne} / V_{güneş})}{R^2_{güneş}}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi * R^3$$

Bir kürenin hacmının formülü

$$P_{merkez} = -_{ş}\frac{GM\rho}{R^2_{güneş}} R_{güne} = -\frac{GM\frac{M}{V}}{R_{güneş}} = -\frac{GM^2}{VR_{güneş}} = -\frac{GM^2}{R^4_{güneş}}\frac{3}{4\pi}$$

Merkezdeki Basınç

İkinci bir yöntem hidraostatik denge denklemini kütle sürekliliği denklemine bölelim.

$$\frac{dP}{dr} / \frac{dM}{dr} \equiv -\frac{GM}{4\pi r^4}$$

Bu denklem yıldız merkezinden yüzeye kadar integre edilebilir.

$$-\int_0^{M_y} \frac{dP}{dM} dM = P_m - P_y = \int_0^{M_y} \frac{GM}{4\pi r^4} dM$$

Burada $_y$ indisi yüzeyi, $_m$ ise merkezi gösterir. M_y, yıldızın toplam kütlesini, P_y, yüzeydeki basıncı, P_m ise merkezdeki basıncı gösterir.

Merkezdeki Basınç

Sağ taraftaki integral için bir alt değer bulubiliriz. $1/r^4$ değeri, $1/r^4_s$ değerinden her zaman daha büyüktür.

$$\int_0^{M_y} \frac{GM}{4\pi r^4} dM > \int_0^{M_y} \frac{GMdM}{4\pi r_y^4} = \frac{G}{4\pi r_y^4} \int_0^{M_y} MdM = \frac{GM_y^2}{8\pi r_y^4}$$

$$P_m - P_y > \frac{gM_y^2}{8\pi r_y^4} \Rightarrow P_m > P_y + \frac{gM_y^2}{8\pi r_y^4} > \frac{gM_y^2}{8\pi r_y^4}$$

Güneş'in merkezi basıncı için bir alt değer bulunmuş olur. Bu değerleri siz bulacaksınız.

Yoğunluk Dağılımı

Bizim büyük sorunumuz yıldız içinde ρ'nun nasıl dağıldığını bilmeyişimizdi. Şimdi onun için şöyle bir dağılım belirleyelim ve denetleyelim.

$$\rho(r) = \rho_c\left(1 - \frac{r^2}{R_*^2}\right)$$

O zaman kütle sürekliliği ifadesi

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho_c\left(1 - \frac{r^2}{R_*^2}\right)$$

Her iki tarafın integralini alalım

$$m(r) = 4\pi \rho_c \left\{ \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R_*^2} \right\}$$

Yoğunluk Dağılımı

Yıldızın toplam kütlesi $M_* = m(R_*)$

$$M_* = \frac{8\pi}{15}\rho_c R_*^3$$

M(r) ve ρ(r) hidrostatik denge denkleminde yerine koyalım.

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G}{r^2}\rho_c\left\{1-\frac{r^2}{R_*^2}\right\}4\pi\rho_c\left\{\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5R_*^2}\right\}$$

Daha sonra da (0,r) aralığında integralini alalım

$$\int_0^r \frac{dP}{dr'}dr' = P(r) - P(0) = -\frac{4\pi G\rho_c}{15}\left\{\frac{5r^2}{2}-\frac{2r^4}{R_*^2}+\frac{r^6}{2R_*^4}\right\}$$

Böylece yıldızın herhangibir derinliğindeki P(r) değerini bulabiliriz ve

$$\boxed{P(r) = \frac{\rho(r)\,k\,T(r)}{\mu\, m_H}}$$

Denklemini kullanarak T(r) elde edilir.

Özellikle sınır değerleri kullanılarak, yani

$r = R_*$ konumunda $P(R_*) = 0$

Alarak yıldızın merkezindeki basıncı bulabiliriz.

Merkezi basınç

$$P(0) = P_c = \frac{4\pi G\rho_c}{15}\left\{\frac{5}{2} - 2 + \frac{1}{2}\right\}R_*^2 = \frac{4\pi G\rho_c R_*^2}{15}$$

Bulduğunuz bu değerin ne denli yüksek olduğunu kavramanız gerekiyor. O nedenle bilinen basınç değerleri ile karşılaştırmanız gerekiyor. Bu merkezi basıncın alt değerini diğer yıldızlar için yazmak istesek.

$$P_m > \frac{GM_{\odot}^2}{8\pi r_{\odot}^4}\left(\frac{M_y}{M_{\odot}}\right)^2\left(\frac{r_{\odot}^4}{r_y}\right)^4$$

Merkezdeki Basınç

Ödev: Bu yaklaşımdan hareketle cgs birimlerinde Güneş'in merkezindeki basıncın değerini bulunuz. Gerçek değeri ile karşılaştırınız.

Gerçek değeri

$$P_c = -\int_{R_\odot}^{0} \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} dr$$

Güneş Merkezindeki Sıcaklık?

$$P_{\mathrm{gaz}} = nkT = \frac{\rho k T}{m}$$

Ödev: Güneş merkezindeki sıcaklığı bulunuz. Gerçek değeri ile karşılaştırınız. Her parametrenin ne olduğunun tanımını yapınız, değerini belirtiniz.