

Yıldızların İç Yapısı ve Evrimi

Temel Yapı Denklemlerinin Çözümü

Denklemlerin Çözümü

Bugüne kadar dört temel içyapı denklemi gördük, bilinmeyenlere bakalım...

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \quad P = P(\rho, M_r)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad M = M(\rho)$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon \quad L = L(\rho, \varepsilon)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa \rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad T = T(T, \rho, \kappa, L_r)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\mu m_H}{k} \frac{GM_r}{r^2} \quad \text{Adya. Konv.} \quad \frac{d \ln P}{d \ln T} < \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Denklemlerin Çözümü

Yıldız içyapı modeli yapmaktan amacımız şu dağılımları bulmaktır; $M(r)$, $L(r)$, $T(r)$, $P(r)$ ve $\rho(r)$. Beş bilinmeyen var ama dört denklem var. $P(r)$, $T(r)$ ve $\rho(r)$ arasında bir ilişkimiz olursa sorun çözülür o zaman durum denkleminde gereksinmemiz var.

$$P_t = P_g + P_r \qquad P_t = \frac{\rho kT}{\mu m_H} + \frac{1}{3} aT^4$$

Sadece bu denklemler yetmez, bunların içinde olan donukluk ve enerji üretimi ifadelerini de yazmalıyız.

Denklemlerin Çözümü

$$\varepsilon_{ix} = \varepsilon'_0 X_i X_x \rho^\alpha T^\beta$$

$$\kappa = \kappa_0 \rho^p T^q$$

$$P_t = \frac{\rho kT}{\mu m_H} + \frac{1}{3} aT^4$$

Üretilen enerji, donukluk ve yoğunluk hesap edilen r' 'de basınca, sıcaklığa ve kimyasal bileşime bağlıdır. Yıldızın kimyasal bileşimi verilince bu durumda yedi bilinmeyenli yedi denklemimiz var. Bu yedi bilinmeyen P , ρ , T , M , L , κ ve ε' 'dir. Bunların hepsi r' 'nin fonksiyonudur.

Denklemlerin Çözümü

Bir yıldızın yapısının hesaplanması önce P , κ ve ε için bağıntılar elde etmeyi ve sonra dört diferansiyel yapı denkleminin çözümlerini içerir. Bu yedi denklem hiç bir zaman analitik olarak çözülemez sadece bilgisayarlarda sayısal çözümlü vardır.

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ Şeklinde birinci dereceden bir diferansiyel denklemin çözümlü tek Olmayacak ve genelde keyfi bir sabit içerir. İşte bu sabitin değerini bulmak için bu çözümlerde sınır koşulları önemli yer tutar.

Denklemlerin Çözümü

Dört diferansiyel denklemin tek çözümü için dört sınır koşulunun bilinmesi gerekir. Yüzeyde $T(R)=0$ ve $P(R)=0$ alınır. Diğer iki sınır koşulunu da merkez için yazabiliriz ki onlarda zaten bu temel denklemlerden çıkar. Merkezde $L(0)=0$ ve $M_r(0)=0$ dir. Bunlar yaklaşımdır!!!

Fakat her iki yanda ikişer sınır koşulunun olması sorunu çözmez. Bir örnek: $P(0)$ ve $T(0)$ biliyoruz diyerek integrasyona içerden başlarsak, T ve P 'nin 0'a gittiği yüzeyde çözümler birbirinden ayrılır, koşullara ulaşılmaz

Denklemlerin Çözümü

Başlangıç koşullarını, her iki uçtan elde edecek çözümler bir ara noktada pürüzsüzce çakışacak şekilde belirleyerek her iki uçtan başlamaktır ki bu yöntemi bilgisayarların olmadığı dönemlerde Schwarzschild deneyerek evrim yollarını hesaplayabilmiştir.

Önemli olan bu denklemlerin çözümü ile yıldızın içyapısını anlamaktır. Bu nedenle çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. İçyapı üzerine çalışan astronomlar özel bir yıldızın değilde benzeşik yıldızların yapısını araştırır.

Denklemlerin Çözümü

Yani aynı kimyasal bileşime ama farklı kütlelere sahip yıldızların yapısını araştırırlar. Bu başlangıçta kütle biliniyor demektir, fakat yarıçap hesaplamalardan sonra bulunur. Bu ise sınır koşullarının önceden bilinmeyen bir yarıçap için konulduğundan anlamsızdır. Bu nedenle bağımsız değişken olarak yarıçap yerine kütle alınır. Temel denklemlerimizi kütle korunum denklemi ile böldüğümüzde bağımsız değişkeni istediğimiz şekilde değiştirebiliriz. Kendisinin de tersini alırız.

Denklemlerin Çözümü

$$(19) \quad \frac{dP}{dm} = -\frac{GM}{4\pi r^4}$$

$$(20) \quad \frac{dL}{dm} = \varepsilon$$

$$(21) \quad \frac{dT}{dm} = -\frac{3\kappa_R L}{64\pi^2 r^4 acT^3}$$

$$(22) \quad \frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

Bu durumda sınır koşullarını tekrar yazarsak yüzeyde yani $m=M$ için $\rho=0$ ve $T=0$ olur.

Merkezde yani $m=0$ için $r=0$ ve $L=0$ olur.

Aynı kimyasal bileşimli bir grup yıldızı aldığımızda κ , ε ve μ aynıdır. Herhangibir kütleyle sahip yıldızın özellikleri bir kez bilinirse diğer yıldızlarınkı çıkarılabilir.

Vogt-Russell Teoremi

Yıldız yapısı belirlenirken önce kütlesini ve kimyasal bileşimini belirleriz. Bundan sonra 3 yardımcı denklemi ve daha sonra 4 diferansiyel denklemi çözeriz. Vogt-Russell teoremi eğer yıldızın kimyasal bileşimi ve kütlesi belli ise bu denklem sisteminin yalnız bir çözümü vardır der. Teoremin ispatı yapımamıştır ve bugün bazı ender durumlarda iki veya daha fazla çözümün mümkün olduğu biliniyor.

Boyutsuz Değişkenler

Temel yapı denklemlerini çözerek her şeyini bildiğimiz referans yıldızı $_0$ indisi ile modelini yapacağımız yıldızı da indissiz gösterelim.

$$\frac{r}{R} = \frac{r_0}{R_0} \quad \rightarrow \quad r = \left(\frac{R}{R_0} \right) r_0 \quad m = \left(\frac{M}{M_0} \right) m_0 \quad (23)$$

Her iki tarafın diferansiyelini alırsak

$$\frac{dr}{dr_0} = \frac{R}{R_0} \quad ve \quad \frac{dm}{dm_0} = \frac{M}{M_0} \quad (24)$$

Bu ifadeler ile yıldızın içinde yoğunluğun nasıl dağıldığını bulabiliriz.

Boyutsuz Değişkenler

Kütle denklemini yazalım ve her iki tarafını son bulduğumuz denklemler ile çarpalım

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad \frac{dr_0}{dr} = \frac{R_0}{R} \quad \frac{dm}{dm_0} = \frac{M}{M_0}$$

$$\frac{dr}{dm} \left(\frac{dr_0}{dr} \right) \left(\frac{dm}{dm_0} \right) = \frac{dr_0}{dm_0} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \left(\frac{R_0}{R} \right) \left(\frac{M}{M_0} \right) = \frac{1}{4\pi r_0^2 \rho_0}$$

düzenlediğimizde,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R_0}{R} \right) \left(\frac{M}{M_0} \right) \left(\frac{r_0^2}{r^2} \right) = \left(\frac{M}{M_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^3$$

Politrop

Bu şekilde her parametre için boyutsuz değişkenler tanımlayarak ve bazı yaklaşımlar yaparak yıldız yapı denklemlerini çözmek olasıdır. Ama ne olursa olsun bilgisayarda sayısal olarak çözmek en doğrusu.

Bu 7 yapı denklemini doğru olarak çözmek birçok gökbilimciyi uğraştırmıştır.

Yöntemlerden birini de politrop modeller oluşturmaktır. Daha önce konveksiyon konusunu işlerken kullandığımız bu kavramı şimdi biraz genişletelim.

Politrop

İdeal gaz yasasını biliyoruz.

$$P_g V = NkT \quad n \equiv \frac{N}{V} \quad P_g = nkT$$

Burada N , parçacık sayısı, n ise parçacık yoğunluğudur. Astrofizikte gaz yasası bu şekilde kullanılmaz, kütle yoğunluğu kullanılır. Farklı kütlelere sahip parçacıklar varsa o zaman n yerine, $n = \frac{\rho}{\bar{m}}$ Kullanırız.

$$P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \quad (28)$$

Politrop

Adyabatik harekette gazın basıncı ile hacmi arasında şöyle bir bağıntı vardı.

$$PV^\gamma = \text{Sabit} \quad \text{veya} \quad \frac{P}{\rho^\gamma} = \text{Sabit} \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

Burada γ , iki esas özgül ısının oranı olup, adı adyabatik ölçektir. Gaz basıncının bu şekilde ifadesine politropik durum denklemini denir.

$$P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H}$$

Bu denklem
nasıl bu hale
geldi?

$$P_g = K \rho^\gamma$$

Politrop

γ adyabatik ölçek, n politropik ölçeğe şu şekilde bağlıdır.

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n} \quad (30)$$

Hidrostatik denge denklemini anımsayalım ve her iki tarafını $r^2\rho(r)$ ile çarpalım.

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G m(r) \rho(r)}{r^2} \quad \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} = -G m(r) \quad (31)$$

Her iki tarafın r 'ye göre diferansiyelini alalım.

Politrop

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -G \frac{dm}{dr} \quad (32)$$

Sağtarafındaki kütle sürekliliği ifadesini yerine koyalım ve r^2 'yi sol tarafa alalım.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (33)$$

Bu denkleme dikkatle bakarsak basınç gradyenti sadece yoğunluğa bağlıdır. Bu denklemden hareketle meşhur Lane-Emden denklemini elde edebiliriz.

Politrop

Şimdi gaz basıncını politropik ölçek ile yazalım ve her iki tarafın r 'ye göre türevini alalım.

$$P_g = K \rho^\gamma = K \rho^{\frac{n+1}{n}} \qquad \frac{dP}{dr} = K \frac{n+1}{n} \rho^{\frac{1}{n}} \frac{d\rho}{dr}$$

Bu ifadeyi önceki denklemde yerine koyalım

$$\left(\frac{(n+1)K}{4\pi nG} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho^{\frac{n-1}{n}}} \frac{d\rho}{dr} \right) = -\rho$$

Politrop

$\rho(r)$ için ikinci dereceden bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü iki sınır değer gerektirir.

$$r=R \quad \text{için} \quad \rho=0$$

$$r=0 \quad \text{için} \quad d\rho/dr = 0$$

Bu son sınır değer merkezde net çekim kuvvetinin sıfır olmasından kaynaklanır. Dolayısıyla $dP/dr = 0$ 'dan hareketle elde edilir. Bu denklemi çözmek için boyutsuz bir değişken tanımlayalım.

Politrop

$$\rho = \rho_c \theta^n \quad \text{diferansiyeli} \quad d\rho = \rho_c n \theta^{n-1} d\theta \quad (38)$$

Yerine koyalım

$$\left(\frac{(n+1)K}{4\pi nG} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{\rho_c n \theta^{n-1} r^2}{(\rho_c \theta^n)^{\frac{n-1}{n}}} \frac{d\theta}{dr} \right) = -\rho_c \theta^n \quad (39)$$

Sadeleştirelim

$$\left(\frac{(n+1)K \rho_c^{((1/n)-1)}}{4\pi G} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -\theta^n \quad (40)$$

$$\left(\frac{(n+1)K \rho_c^{((1/n)-1)}}{4\pi G} \right) = \alpha^2 \quad \text{dersek} \quad \boxed{\frac{\alpha^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -\theta^n} \quad (41)$$

Politrop

Denklemin sağ tarafı boyutsuz olduğu için sol tarafın da boyutsuz olması gerekir yani α uzunluk birimindedir. Şimdi boyutsuz bir değişen daha tanımlayalım

$$(42) \quad r = \alpha \xi \quad \text{deferansiyeli} \quad dr = \alpha d\xi$$

o zaman denklemimiz,

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (43)$$

Bu ifadeye **Lane-Emden** denklemi denir.

Politrop

θ 'nın boyutsuz değişken ξ 'ye göre değişimini verir. Sınır değerlerine bakalım.

$\xi=0$ (yani $r=0$) için $\theta=1$ (yani $r=0$ 'da $\rho=\rho_c$)
 $d\theta/d\xi = 0$ merkezde çekimin sıfır olması. $\theta=0$
olduğu yerde yani yüzeyde ise $\xi=\xi_R$ alacağız.

Bu denklemde ξ değişkeni yarıçapı gösteren boyutsuz, θ ise $(0,1)$ aralığında değişen ve yoğunlukla ilgili boyutsuz değişen olduğunu unutmayalım. Dolayısıyla L-E denkleminin çözümü bize yarıçapın fonksiyonu olarak yoğunluğu verecektir.

Politrop

Adyabatik koşullar altında ideal gaz yasası

$$P \propto \rho T \quad \text{ve} \quad P \propto \rho^\gamma$$

O zaman, $\rho \propto T^{1/(\gamma-1)} \propto T^n$ (44)

θ değişkenini anımsarsak $\rho = \rho_c \theta^n$

Bu durumda θ sıcaklığın bir göstergesi olacak ve boyutsuz ξ 'ye göre değişimi verecektir.

Keyfi n değerleri için bu denklemin sayısal çözümü vardır, analitik çözümü yoktur.

Politrop

Lane-Emden denkleminin belirli n değerleri için ise analitik çözümü vardır, sadece $n=0, 1, 5$ değerleri için.

$n=0$ sabit yoğunluğu gösterir. $n=0$ için $\theta^n = 1$ ve $\rho = \rho_c \theta^n$ den dolayı $\rho = \rho_c$

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -1 \quad \text{İntegralini} \quad \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{\xi}{3} + \frac{C}{\xi^2}$$

alırsak

$\xi=0$ da $d\theta/d\xi=0$ ikinci sınır koşulu gereği $C=0$. Tekrar integralini alırsak

$$\theta = \frac{-\xi^2}{6} + C_2 \quad \text{Birinci sınır koşulu} \quad \theta = 1 - \frac{\xi^2}{6}$$

Politrop

$n=1$ için L-E denklemi şu şekli alır.

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \theta = 0$$

Bu denklemi çözmek için yeni değişken tanımlamalıyız. $\chi = \theta\xi$ o zaman denklem,

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{-\chi}{\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\chi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = \frac{2\chi}{\xi^3} - \frac{2}{\xi^2} \frac{d\chi}{d\xi} + \frac{1}{\xi} \frac{d^2\chi}{d\xi^2}$$

O zaman yukarıdaki denklemi şu hale gelir.

$$\frac{1}{\xi} \frac{d^2\chi}{d\xi^2} + \frac{\chi}{\xi} = 0$$

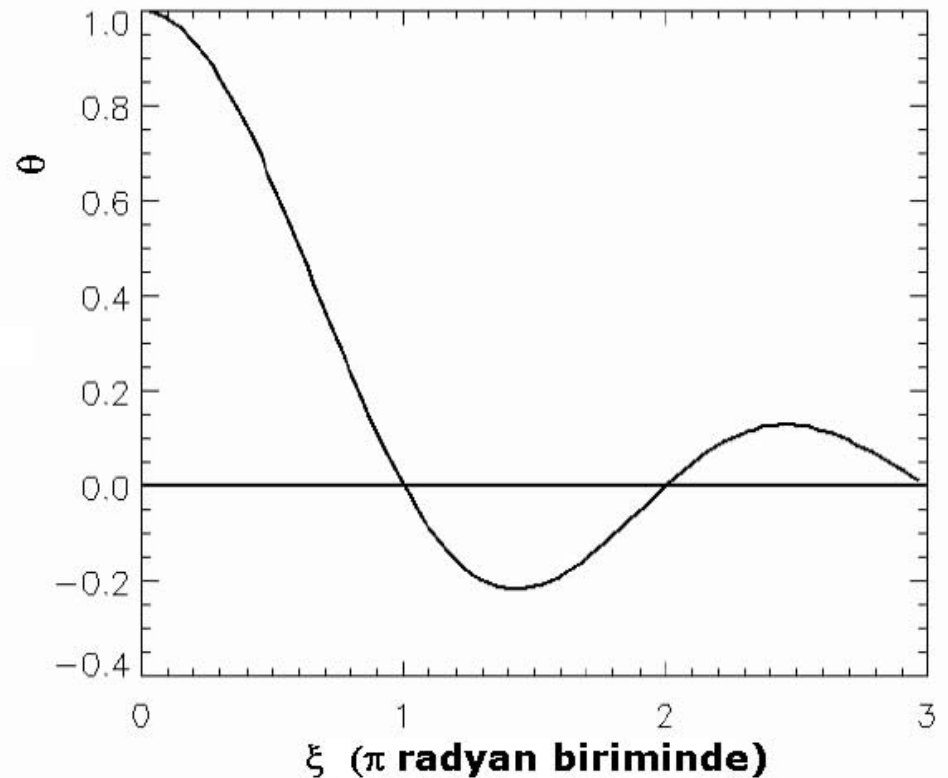
Politrop

Bu denklem $\chi = \sin \xi$ koyarak çözülür. O zaman,

$$\theta = \frac{\sin \xi}{\xi}$$

Grafik olarak,

$\xi = \pi$ de $\theta = 0$ bu ise yıldızın yüzeyi demektir. Ondan sonraki değerlerin fiziksel anlamı yoktur.



Politrop

$r = \alpha \xi$ değişken dönüşümünü anımsayalım.
Burada α ,

$$\alpha = \left(\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{\frac{(1-n)}{2n}} \quad (49)$$

$n=1$ için yıldızın yarıçapı bulunmuş olur.

$$R_* = \alpha \pi = \left(\frac{2K}{4\pi G} \right)^{1/2} \pi \quad (50)$$

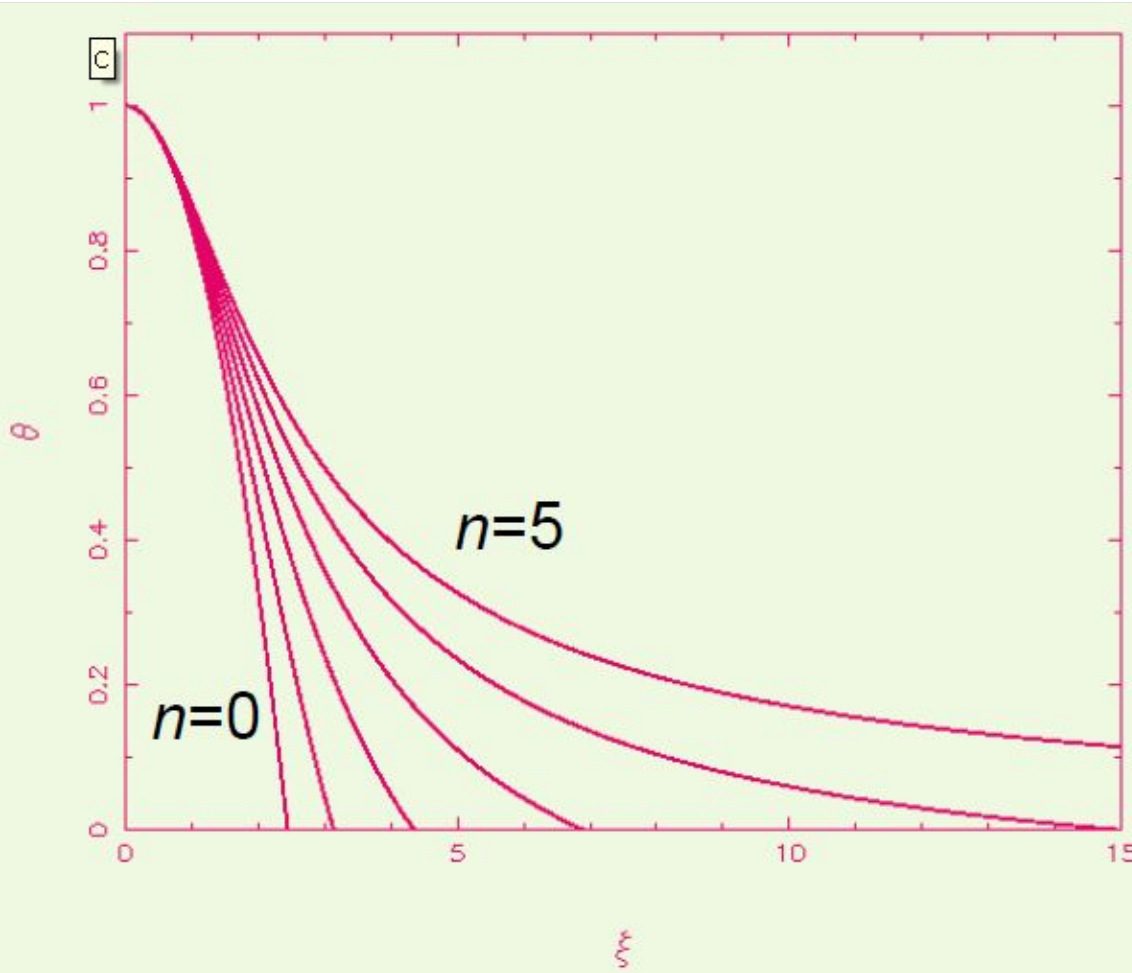
$n=5$ için $\theta = \left(1 + \frac{\xi^2}{3} \right)^{-1/2}$, $\xi_R = \infty$ olur.

Politrop

L-E denkleminin $n=0$ çözümünde $\rho=\rho_c$ çıkıyor bu durum ancak dünya benzeri bir gezegenin iç yapısı için kaba bir yaklaşımdır.

Son çözüm $n=5$ de ise $\xi_R=\infty$ çıktığına göre bu yıldızın yarıçapı sonsuz demektir!. $n>5$ için tüm çözümlerde yarıçapın sonsuz çıkacağı gösterilebilir. Bunun anlamı sadece $n<5$ için yıldızın yüzeyi vardır. Normal yıldızlar için sadece iki ilginç çözüm vardır $n=1.5$ ve $n=3$ ve n 'nin bu değerleri içinde analitik çözüm yoktur.

Politrop



$n=0, 1, 2, 3, 4, 5$
için sayısal
çözümler sol
tarafıta. Analitik
çözümle
kıyaslayın.

$$n=0, \quad \theta=1-\left(\frac{\xi^2}{6}\right)$$

$$n=1, \quad \theta=\frac{\sin \xi}{\xi}$$

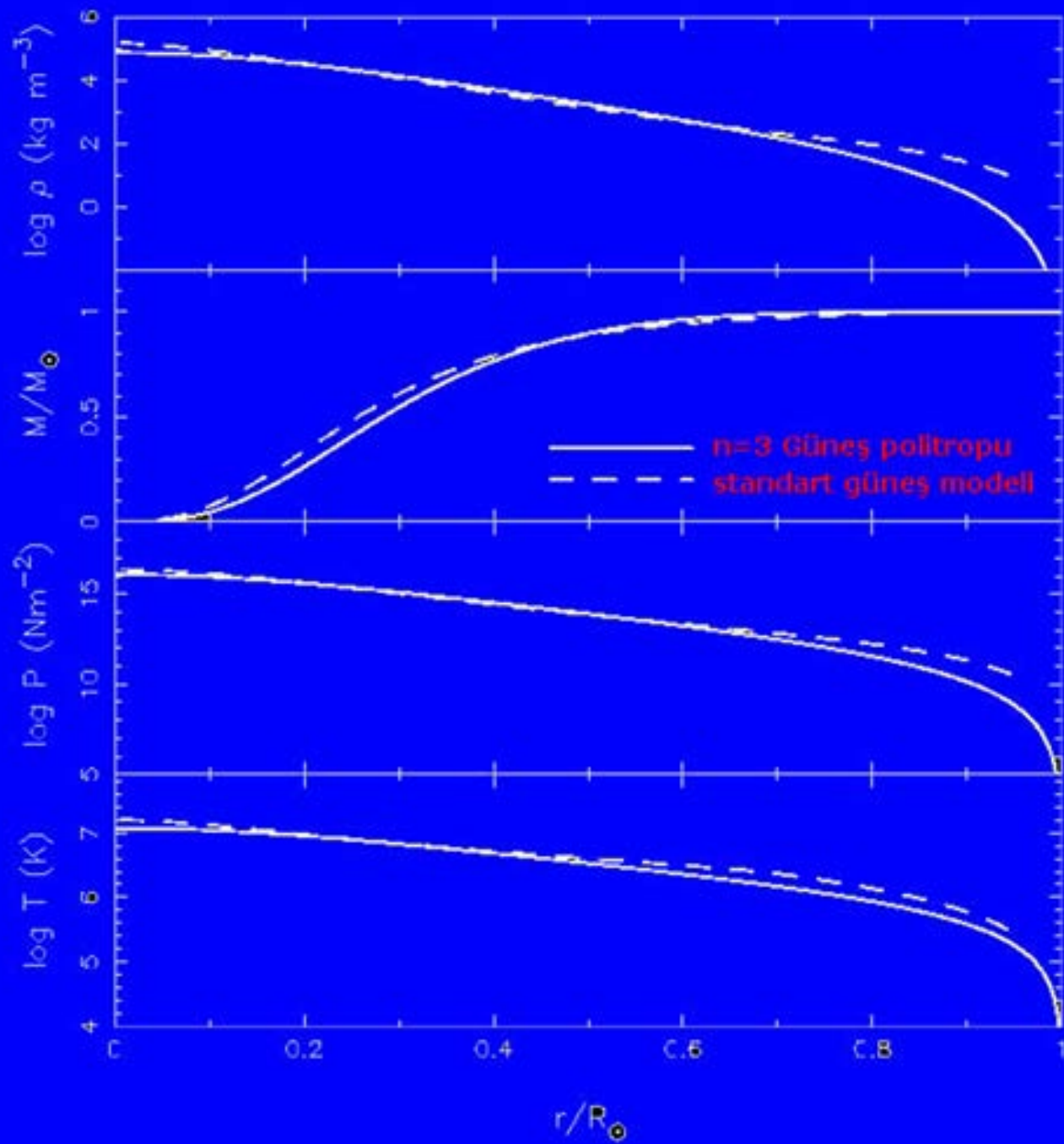
$$n=5, \quad \theta=\frac{1}{\left(1+\frac{\xi^2}{3}\right)^{0.5}}$$

Politrop

L-E denkleminin sayısal çözümlerinin sonuçları çizelgede görülmektedir. (52)

n	ξ_{R}	$-\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_{\text{R}}}$
0	2.45	3.33×10^{-1}
1	3.14	1.01×10^{-1}
2	4.35	2.92×10^{-2}
3	6.90	6.14×10^{-3}
4	15.00	5.33×10^{-4}

Politrop



Politrop

L-E denklemini sadece bir parametreye yani politropik ölçeğe yani n' 'ye bağlıdır. Verilen bir n için yıldızın iç yapısının modeli oluşturulmuşsa o zaman boyutsuz iki ölçeklendirilmiş parametre iç yapıyı fiziksel birimlerle göstermeli. Yani K' 'ya ρ_c' 'ye M' 'ye R' 'ye bağlı olmalı. Eğer belirli bir n için L-E denkleminin sayısal veya analitik çözümü biliyorsak yıldızın kütesini ve yarıçapını şu şekilde gösterebiliriz.

Politrop

$$R_* = \alpha \xi_R = \left(\frac{K}{G} \frac{n+1}{4\pi} \right)^{1/2} \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \xi_R \quad \theta = 0 \text{ için } \xi \text{ gücü verilmemeli}$$

$$M_* = \int_0^{R_*} 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi \alpha^3 \rho_c \int_0^{\xi_R} \xi^2 \theta^n d\xi$$

$$M_* = 4\pi \alpha^3 \rho_c \int_0^{\xi_R} \left[-\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) \right] d\xi$$

$$M_* = 4\pi \left[\frac{K}{G} \frac{n+1}{4\pi} \right]^{3/2} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \left[-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_R}$$

Bu şekilde elde edilen R ve M ifadelerini birleştirelim ve ortalama yoğunluğu bulalım.

$$R^{\frac{3-n}{n}} M^{\frac{n-1}{n}} = \frac{K}{GN_n} \quad \text{burada} \quad N_n = \frac{(4\pi)^{1/n}}{n+1} \left(\left[-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_R} \right)^{\frac{1-n}{n}} \xi_R^{\frac{n-3}{n}}$$

Politrop

$$R^{\frac{3-n}{n}} M^{\frac{n-1}{n}} = \frac{K}{GN_n} \quad \text{burada} \quad N_n = \frac{(4\pi)^{1/n}}{n+1} \left(\left[-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_R} \right)^{\frac{1-n}{n}} \xi_R^{\frac{n-3}{n}}$$

Burada N_n boyutsuz sadece n 'ye bağlı. O zaman yıldızın ortalama yoğunluğunu da hesap edebiliriz.

$$\rho_{ort} \equiv \frac{3M}{4\pi R^3} = \rho_c \frac{3}{\xi_R^3} \left[-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_R}$$

Ayrıca merkezi basıncı da hesaplayabiliriz

$$P_c = K \rho_c^{\frac{n+1}{n}} = W_n \frac{GM}{R^4} \quad \text{burada} \quad W_n = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{\rho_c}{\rho_{ort}} \right)^{\frac{n+1}{n}} N_n$$
