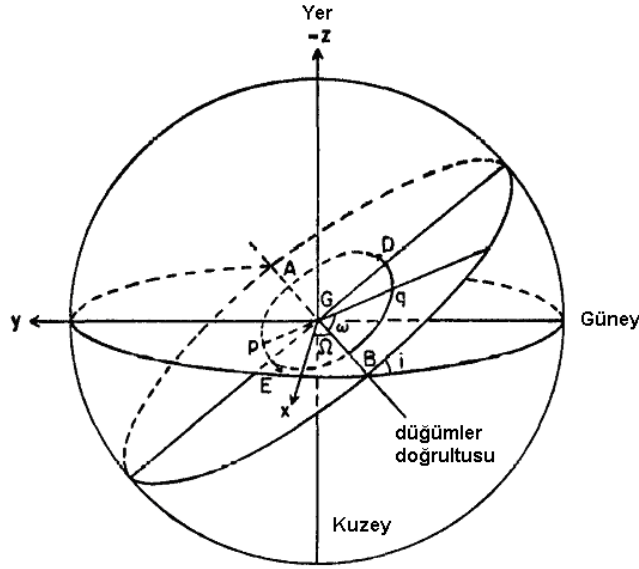


Tek Çizgili Tayfsal Çift Yıldızlar (SB1)

Yoldaş bileşen, baş bileşene göre daha sönük olduğundan tayfa katkıda bulunmaz ve tek yıldızların tayfına benzer gözlemlere ulaşılır. S_1 baş bileşenin kütle merkezine göre mutlak yörüngesi dikkate alınır. Mutlak yörüngenin yarı-büyük eksen uzunluğu a_1 (ve sönük bileşeninki a_2 olmak üzere tek bileşenin tayfının görülebilmesi durumunda indis dikkate alınmaz) olmak üzere yörüngeye ilişkin $a \sin i$ değeri elde edilebilir. Bu nedenle yörünge eğim açısı olan i değeri doğrudan hesaplanamaz. Genellikle bu türden yıldızlar örten değişen yıldız olmaları durumunda i yörünge eğim açısı, ışık eğrisi çözümlerinden bulunur.

Yörüngenin hesaplanmasında ortaya çıkan bir başka problem, düğümler doğrultusunun durum açısı olan Ω 'nın hesaplanamamasıdır. Fakat yıldız düğümlerde bulunduğu, bakış doğrultumuzdaki hız vektörünün yönü hesaplanabilir ve buradan yıldızın çıkış ya da iniş düğümünde olup olmadığı belirlenebilir. ω , enberi noktasının çıkış düğümünden olan açısal uzaklığıdır ve yörüngesel hareket yönünde ölçülür. Şekil 5.15'de daha önceden incelediğimiz bir çift yıldızın görelî eliptik yörüngesine karşı, parlak yıldızın mutlak yörünge elipsi karşılaştırılmıştır. $-z$ eksenî Yer doğrultusunu (gözlemci yönünü) göstermektedir. Her iki yörünge elipsinin karşılaştırılmasından z eksenî doğrultusundaki yer değiştirmenin,



Şekil 5.15. Görünür ve gerçek yörünge elipsi.

$$z = -r \sin(v + \omega + 180) \sin i = r \sin(v + \omega) \sin i \quad (158)$$

olacağını yazabiliriz. z eksenî doğrultusundaki yani bakış doğrultumuzdaki hız ifadesini (158) nolu denklemin zamana göre türevi alınarak bulabiliriz. Bu türev alındığında,

$$\frac{dz}{dt} = \sin(v + \omega) \sin i \frac{dr}{dt} + r \cos(v + \omega) \sin i \frac{dv}{dt} \quad (159)$$

elde edilir. İfade incelendiğinde zamana göre türev ifadeleri bulunmalıdır. dr/dt 'nin hesaplanabilmesi için elipsin kutupsal koordinatlardaki denklemini kullanılır.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos v}{a(1-e^2)} \quad (160)$$

1/r'ye göre türev alındığında,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} &= \frac{e\sin v}{a(1-e^2)} \frac{dv}{dt} \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{r^2 e \sin v}{a(1-e^2)} \frac{dv}{dt} = \frac{h e \sin v}{a(1-e^2)} = \frac{2\pi ab}{P} \frac{e \sin v}{a(1-e^2)} \\ &= nb \frac{e \sin v}{(1-e^2)} = na \sqrt{1-e^2} \frac{e \sin v}{(1-e^2)} = \frac{na e \sin v}{\sqrt{1-e^2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada dv/dt'nin hesaplanması için başlangıç olarak Kepler'in ikinci yasası dikkate alınır,

$$\begin{aligned} r^2 \frac{dv}{dt} &= h = \frac{2\pi ab}{P} = nab \\ r \frac{dv}{dt} &= \frac{nab}{r} = \frac{nab(1+e\cos v)}{a(1-e^2)} = \frac{nb(1+e\cos v)}{(1-e^2)} \\ &= \frac{na \sqrt{1-e^2} (1+e\cos v)}{(1-e^2)} = \frac{na(1+e\cos v)}{\sqrt{1-e^2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\cos \omega = \cos((v + \omega) - v) = \cos v \cos(v + \omega) + \sin v \sin(v + \omega)$$

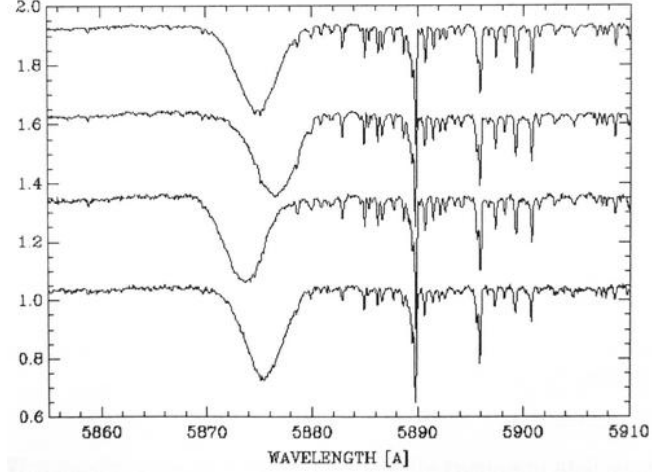
olduğu dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{na e \sin v}{\sqrt{1-e^2}} \sin(v + \omega) \sin i + \frac{na(1+e\cos v)}{\sqrt{1-e^2}} \cos(v + \omega) \sin i \\ &= \frac{na \sin i}{\sqrt{1-e^2}} (e \cos \omega + \cos(v + \omega)) \end{aligned}$$

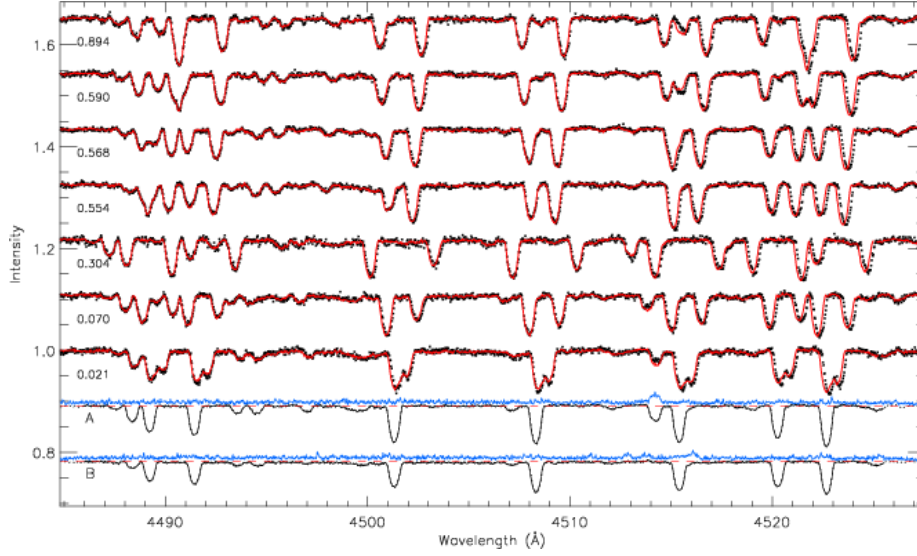
ifadesini bulunur. Gözlemsel olarak elde edilen dikine hız ifadesinde sabit değer olarak gösterilen V_0 , kütle merkezinin dikine hızı ve v 'nün zamanla değişimi sonucu ortaya çıkan dikine hız değişimi (dz/dt) bulunmuş olur. Formülde yer alan diğer tüm gösterimler yörüngeye ilişkin sabitlerdir.

$$V_r = V_0 + K(e \cos \omega + \cos(v + \omega)) \quad (161)$$

Burada yarı-genlik $K = \frac{na \sin i}{\sqrt{1-e^2}}$ ve $n = 2\pi/P$ ile verilir. Dairesel yörünge için $e=0$ olacağından $K = na \sin i$ olacaktır. Dikine hız denklemini elde ettiğimize göre artık tayfsal çift yıldızların yörünge çözümlerinin ne şekilde gerçekleştirileceği konusuna geçebiliriz.



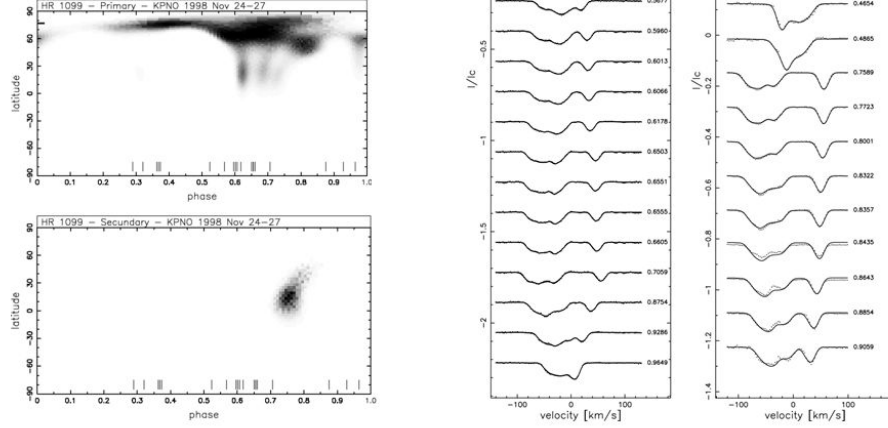
Şekil 5.16. Tek çizgili tayfsal bir çift yıldızda yıldıza ait soğurma çizgisinin, atmosferik çizgilere göre yer değiştirmesi.



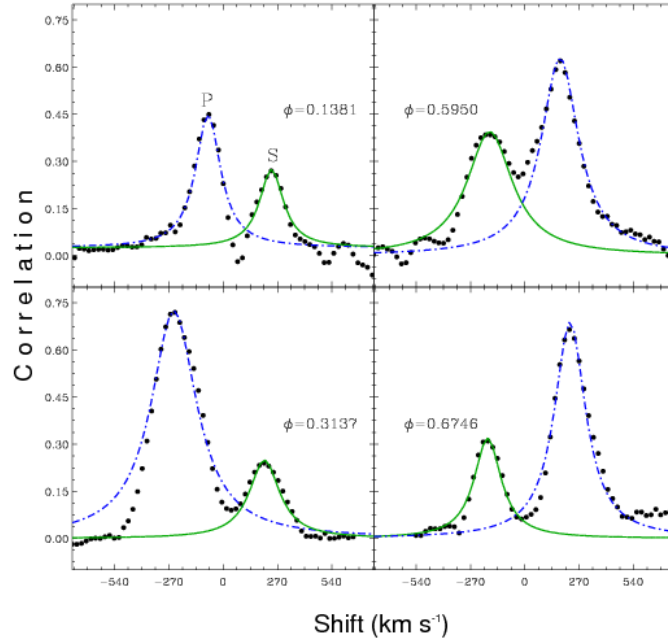
Şekil 5.17. Algol türü bir sistem olan AR Aur'un farklı evrelerde alınmış tayflarının değişimi.

"Doppler Tomography" on RS CVn

- Reconstructing spot distributions and properties from spectrum line variations



Şekil 5.18. RS CVn türü bir yıldızın tayfsal gözlemlerinden Doppler Tomografi yöntemi ile yüzeyindeki lekelerin konum ve büyüklükleri belirlenebilmektedir. Sistem aynı zamanda Algol türü bir çift yıldızdır.



Şekil 5.19. Çapraz korelasyon fonksiyonu (Cross correlation function) yöntemi ile bileşen yıldızların hızlarının hesaplanması.

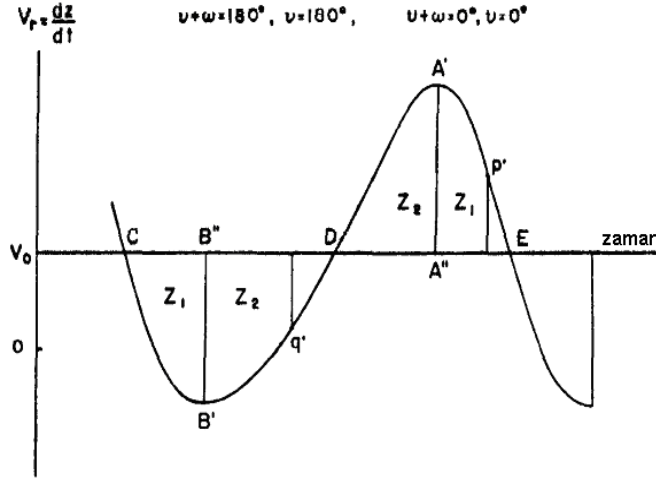
YÖRÜNGE ÇÖZÜMÜ

R.Lehman-Filhes Yöntemi

Dikine hız eğrisinden P dolanma döneminin bulunması, ışık eğrisinden dönemin bulunması gibidir. Dönem, iki maksimum ya da minimum arasında geçen süre olarak belirlenir. Yörünge döneminin elde edilmesi durumunda $n=2\pi/P$ değeri kolaylıkla hesaplanabilir. Gözlenen dönem ile gerçek P_0 dönemi arasında, ışık hızının sonlu olması nedeniyle,

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{V_0}{c} \quad (163)$$

şeklinde bir ilişki bulunur. Sistemin kütle merkezinin hızı V_0 , alanlar yasası dikkate alınarak hesaplanır. Kütle merkezine göre parlak yıldız tam bir dönem sonunda aynı noktaya gelir. Bu nedenle Şekil 5.20'de gösterilen z_{t+P} ve z_t aynı olmalıdır.



Şekil 5.20. V_0 eksenli tek çizgili tayfsal bir çift yıldızın dikine hız eğrisi.

Buradan,

$$z_{t+P} - z_t = \int_t^{t+P} \frac{dz}{dt} dt = 0 \quad (164)$$

olmalıdır. Yani bir dönem boyunca V_0 eksenine göre süpürülen alan sıfır olmalıdır. Dikine hız eğrisindeki y eksenini, dz/dt 'yi ve x eksenini ise dt zaman eksenini gösterir. Uzayda bakış doğrultumuz boyunca z koordinatındaki değişimler, dikine hız eğrisindeki bir alana karşılık gelir. Bu ayrımı yapabilmek için dikine hız eğrisindeki alanı göstermek amacıyla Z sembolü kullanılmıştır.

$$(DA'E) \text{ alanı} = \int_D^E \frac{dz}{dt} dt = z_E - z_D$$

$$(CB'D) \text{ alanı} = \int_C^D \frac{dz}{dt} dt = z_D - z_C = -(z_C - z_D)$$

Denklemlerini dikine hız eğrisi üzerindeki alanları hesaplamak için yazabiliriz. V_0 eksenini burada öyle seçilmelidir ki $DA'E$ alanı ile $CB'D$ alanları, işareti hariç birbirine eşit olsun. Burada $z_E = z_C$ alınabilir bunun nedeni ise tam bir dönem sonunda z -koordinatının aynı olmasıdır. Bu durum parlak yıldızın kütle merkezine göre konumu nedeniyle doğrudur. Şimdi V_0 eksenini yeni x eksenini olarak alarak, kütle merkezine göre dikine hız eğrisinin denklemini,

$$V_r = K(e \cos \omega + \cos(\nu + \omega)) \quad (165)$$

şeklinde yazabiliriz. V_0 eksenine göre ölçülen maksimum hızları A ve B ile ifade edersek,

$$\begin{aligned} A &= K(1 + e \cos \omega) & \nu + \omega = 0^\circ & \text{ için} \\ B &= K(1 - e \cos \omega) & \nu + \omega = 180^\circ & \text{ için} \end{aligned} \quad (166)$$

olmalıdır. K değeri dikine hız eğrisinin yarı genliğidir ve

$$K = 1/2 (A + B) \quad (167)$$

denklemleri ile hesaplanabilir bir büyüklüktür. Birimi km/sn dir. A ve B cinsinden dikine hız denkleminin bileşenleri düzenlendiğinde,

$$K e \cos \omega = 1/2 (A - B) \quad \text{ve} \quad e \cos \omega = \frac{A - B}{A + B} \quad (168)$$

olarak elde edilir. e ve ω 'yı ayrı ayrı bulabilmek için $e \sin \omega$ terimini içeren bir ifadeye gereksinim duyulur. Dikine hızın maksimum olduğu noktalarda parlak bileşen A düğümünden geçer ve E düğümünde ise olası en uzak konumda bulunur. Kütle merkezine göre,

$$Z_1 = \int_A^E \frac{dz}{dt} dt = z_E - z_A = z_E \quad (169)$$

yazabiliriz. Bunun nedeni bu noktaların düğümler doğrultusunda bulunuyor olması ve kütle merkezinden geçiyor olmasıdır.

$$Z_1 = (A'A''E) \text{ alanı} = (CB'B'') \text{ alanı} = z_E$$

$$Z_2 = (DA'A'') \text{ alanı} = (B'B''D) \text{ alanı} = z_D$$

Dikine hız eğrisinin maksimum ve minimumlarını bulmanın en kolay yolu, zaman eksenine çizilecek paralel doğrultuların orta noktalarını birleştiren doğrunun kestiği noktanın bulunmasıdır. Maksimumdan geçen y eksenini doğrultusundaki doğru V_0 ekseninin üzerindeki bölgeyi Z_1 ve Z_2 alanları şeklinde ikiye bölecektir. Aynı olay eksenin alt kısmına rastlayan minimum içinde geçerli olacaktır. E noktasında yıldız düğümler doğrultusuna paralel hareket eder, aynı durum D noktası içinde geçerlidir. Bu nedenle, bu noktalarda $dz/dt=0$ dır ve

$$0 = e \cos \omega + \cos(\nu + \omega)$$

yazabiliriz. Bu durumda E noktası için, $\text{Cos}(v_1+\omega) = -e\text{Cos}\omega = \frac{B-A}{A+B}$ olacaktır. Buradan hareketle,

$$\text{Sin}(v_1+\omega) = \sqrt{1 - \left(\frac{B-A}{A+B}\right)^2} = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$$

ve D noktası için,

$$\text{Cos}(v_2+\omega) = -e\text{Cos}\omega = \frac{B-A}{A+B}$$

$$\text{Sin}(v_2+\omega) = -\frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$$

şeklinde yazılır. Kosinüsleri aynı, fakat sinüsleri farklı işarete sahip iki denklem elde edilmiştir. Her iki durum için işaretleri hariç aynı sonuç elde edilmiştir. Ayrıca, $(z = r \text{Sin}(v+\omega) \text{Sin } i)$ ifadesinden

$$Z_1 = z_E = r_1 \text{sin}(v_1 + \omega) \text{sin } i$$

$$Z_2 = z_D = r_2 \text{sin}(v_2 + \omega) \text{sin } i = -r_2 \text{sin}(v_1 + \omega) \text{sin } i$$

denklemlerini yazabiliriz. Z_2 'nin pozitif değeri alınması durumunda ve $r = a(1-e^2)/(1+e\text{Cos } v)$ ifadesi kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{r_1}{r_2} = \frac{1+e \cos v_2}{1+e \cos v_1} = \frac{1+e \cos \{(v_2 + \omega) - \omega\}}{1+e \cos \{(v_1 + \omega) - \omega\}} \\ &= \frac{1+e \cos(v_2 + \omega) \cos \omega + e \sin(v_2 + \omega) \sin \omega}{1+e \cos(v_1 + \omega) \cos \omega + e \sin(v_1 + \omega) \sin \omega} \\ &= \frac{1 - \cos^2(v_1 + \omega) - e \sin(v_1 + \omega) \sin \omega}{1 - \cos^2(v_1 + \omega) + e \sin(v_1 + \omega) \sin \omega} \\ &= \frac{\sin^2(v_1 + \omega) - e \sin(v_1 + \omega) \sin \omega}{\sin^2(v_1 + \omega) + e \sin(v_1 + \omega) \sin \omega} \end{aligned}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sin(v_1 + \omega) - e \sin \omega}{\sin(v_1 + \omega) + e \sin \omega}$$

Orantının özelliğinden,

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{2e \sin \omega}{2 \sin(v_1 + \omega)} = \frac{e \sin \omega}{\sin(v_1 + \omega)}$$

yazabiliriz. Bu ifade ile $\text{Sin}(v_1+\omega)$ değerini kullanarak,

$$e \sin \omega = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

ifadesi bulunur. Bu denklem ile birlikte,

$$e \cos \omega = \frac{A - B}{A + B}$$

ifadelerini kullanarak e ve ω terimleri hesaplanır. Enberi noktasında $v=0$ ve $p'=K(1+e)\cos\omega$ olacaktır. Buraya kadar K , e ve ω parametreleri bulunduğu için ordinat ekseninde p' uzaklığı hesaplanabilir. Aslında dikine hız eğrisi üzerinde iki ayrı noktanın uzunluğu bu değere sahiptir. Ayrıca A noktasında $v+\omega=0^\circ$ ve B noktasında $v+\omega=180^\circ$ değerlerine sahip olduğu bilinmektedir. ω değeri bilindiğinden, dikine hız eğrisi üzerinde enberi ve enöte noktalarının konumları kolaylıkla belirlenir. Enberi noktasının konumu belirlendikten sonra T enberi noktasından geçiş zamanının belirlenmesi, enberi noktasının zaman ekseninde karşılık gelen nokta dikkate alınarak bulunur.

Yarı-genlik,

$$K = \frac{na \sin i}{\sqrt{(1-e^2)}} = \frac{2\pi}{P} \frac{a \sin i}{\sqrt{(1-e^2)}}$$

şeklinde idi. Bu ifade yardımıyla,

$$a \sin i = \frac{KP}{2\pi} \sqrt{(1-e^2)} = \frac{(A+B)}{4\pi} P \sqrt{(1-e^2)}$$

hesaplanabilir. A , B ve K parametrelerinin birimleri km/sn' dir. Eğer dönem için birim gün olarak alınırsa, bu durumda ilave olarak $60 \times 60 \times 24 = 86400$ çarpanı kullanılmalıdır.

$$a \sin i = 13751KP \sqrt{(1-e^2)}$$

bu denklemden $asini$ değeri km birimlerinde bulunur, a parlak bileşenin mutlak yörüngesine ait yarı-büyük eksen uzunluğudur. Benzer bir ifadeyi sönük bileşen içinde elde edebiliriz. Lehman-Filhes yönteminde V_0 , A , B , Z_1 , Z_2 değerleri grafik üzerinden ölçülen büyüklüklerdir ve P , T , e , ω ve $asini$ değerleri ise hesaplanabilen büyüklüklerdir.

Özet olarak yöntemde dikkate alınan önemli ifadeler:

$$V_r = V_0 + K(e \cos \omega + \cos(v + \omega)), \quad K = 1/2 (A+B)$$

$$e \cos \omega = \frac{A - B}{A + B} \quad e \sin \omega = \frac{2\sqrt{AB}}{A + B} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

$$a \sin i = 13751KP \sqrt{(1-e^2)}$$

şeklinde dir.

Yörünge parametrelerinin gözlemsel veriler ile karşılaştırılabilmesi için aşağıdaki denklemler yardımıyla teorik dikine hız eğrisi hesaplanmalı ve gözlemler ile karşılaştırılmalıdır. Bu amaçla kullanılacak denklemler aşağıdaki gibidir.

$$M_a = \frac{2\pi}{P}(t - T) = n(t - T) = E - e \sin E$$

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

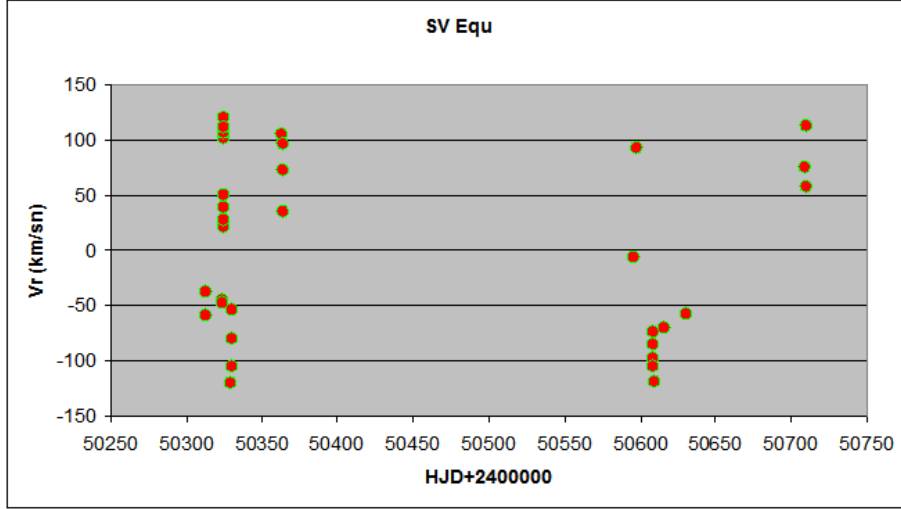
$$V_r = V_0 + Ke \cos \omega + K \cos(\nu + \omega)$$

Başlangıç olarak kabul edilecek P, V₀, e ve ω değeri dikkate alınarak her bir M_a değeri için ν gerçel anomali açısı hesaplanmalıdır. Ardından dikine hız denkleminde bu parametreler kullanılarak teorik dikine hız değerleri (V_r) hesaplanmalıdır. Her gözlem zamanına karşılık gelen teorik dikine hız değeri ile gözlemsel dikine hız değeri karşılaştırılmalıdır. Eğer başlangıç olarak alınan parametreler doğru ise bu durumda her iki değer birbiri ile çakışmalıdır. Bir uyumsuzluk bulunuyorsa başlangıç parametreleri üzerinde değişiklikler yapılarak uyumlu hale getirilmelidir. Çözüm, fark kare toplamının minimum olması $\sum(V_{gözlem} - V_{teorik})^2 = minimum$ sağlandığında doğru olduğu kabul edilebilir. Fakat gerçek uygulamalarda böylesine bir analiz işlemi için kullanılan en iyi analiz yöntemi, diferansiyel düzeltme yöntemidir.

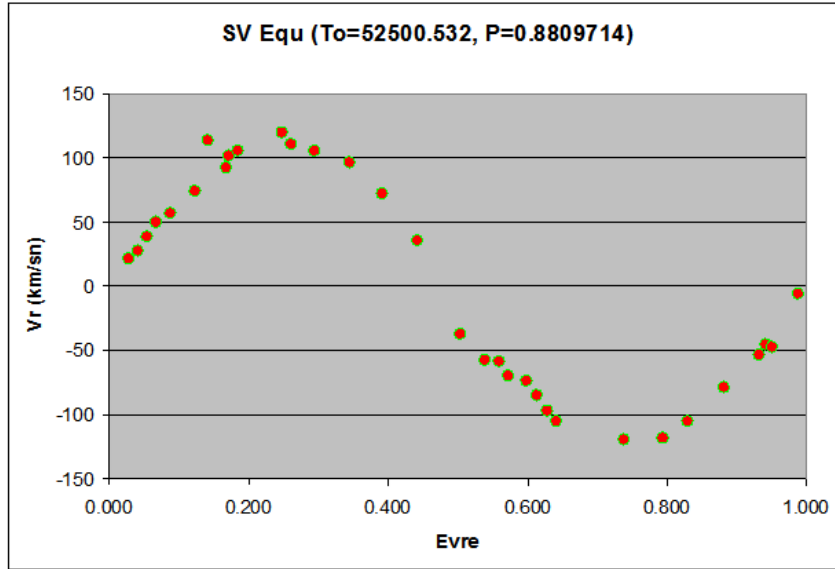
Örnek Gözlemsel Veri: SV Equ (W UMa), P(gün)= 0.88097307 ve T₀= 2445820.085

HJD (+2400000)	Evre	V _r (km/sn)
50312.6435	0.0312	-38
50312.6921	0.0863	-58.7
50323.6003	0.4683	-45.5
50323.6084	0.4775	-47.9
50324.5581	0.555	21.4
50324.5689	0.5678	27.5
50324.5809	0.5814	39
50324.592	0.594	49.4
50324.6836	0.698	101.1
50324.6947	0.7106	105.8
50324.7514	0.775	119.5
50324.7624	0.7875	110.9
50329.589	0.2662	-120.1
50330.5496	0.3566	-105.3
50330.5965	0.4098	-79.5
50330.6395	0.4586	-53.5
50363.5555	0.8219	105.6

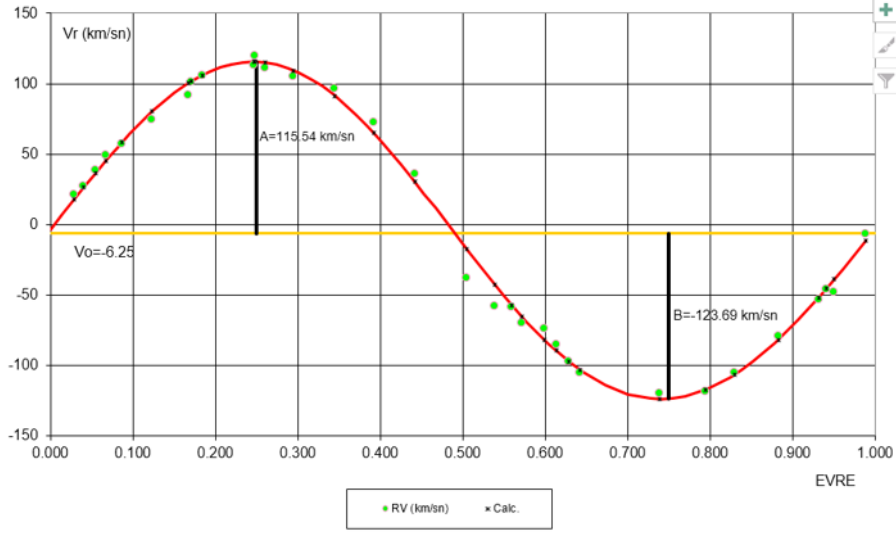
50363.5994	0.8717	95.9
50363.641	0.9189	72.4
50363.6846	0.9684	35.4
50595.8623	0.5156	-6.5
50597.781	0.6935	91.9
50608.7333	0.1256	-74.2
50608.7457	0.1397	-85
50608.7593	0.1551	-97.7
50608.7709	0.1683	-105.5
50609.7865	0.3211	-118.9
50615.7573	0.0986	-69.8
50630.7042	0.065	-57.5
50708.7452	0.6501	74.4
50709.5942	0.6138	57
40709.735	0.7736	113.1



Şekil 5.21a. Zamana göre dikine hız verilerinin değişimi.



Şekil 5.21b. Evreye göre dikine hız eğrisinin değişimi.

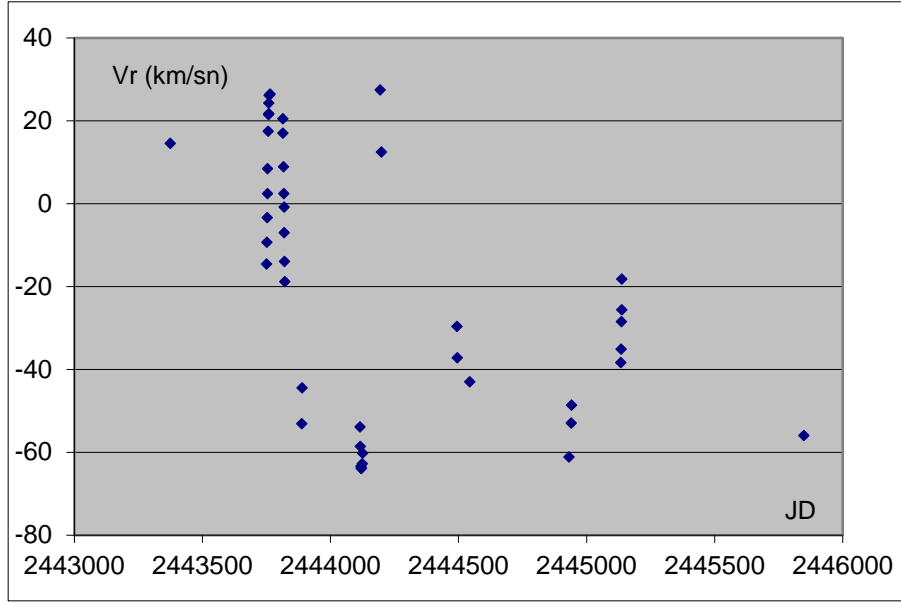


Şekil 5.21c. Dikine hız eğrisi üzerinde gözlemsel ve teorik çözüm ve dikine hız eğrisine ilişkin karakteristik parametreler.

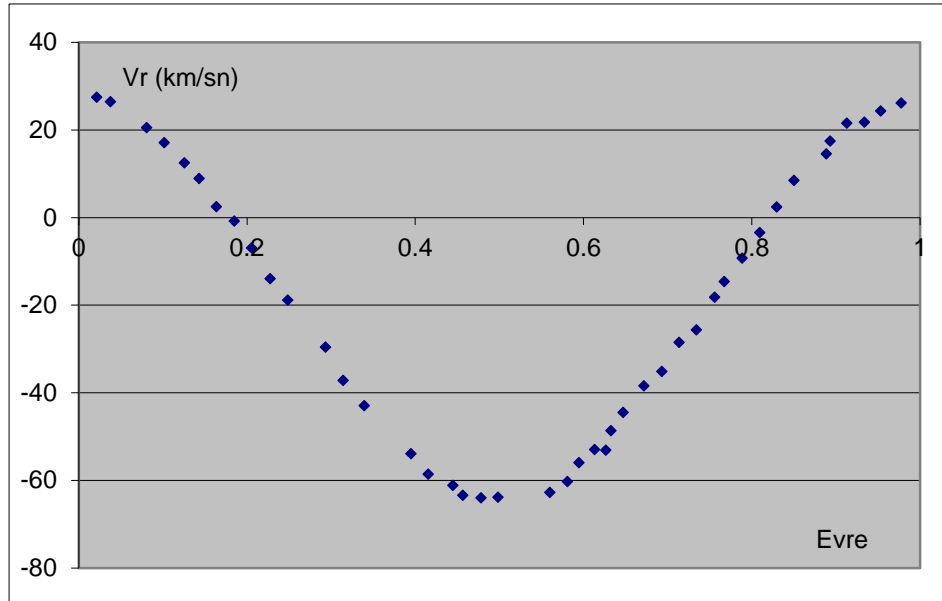
Ödev Gözlemsel Veri: Bilinmeyen bir yıldız!!! Sistemin ışık elemanları: $T_0=2445820.085$, $P=47^{\text{g}}.8487$

Sıra No	HJD	VR(km/s)	e_VR(km/s)
1	2443374.470	14.58	0.93
2	2443753.476	-3.36	0.46
3	2443814.307	20.54	0.53
4	2443754.443	2.45	0.7
5	2443815.302	17.11	0.73
6	2443755.412	8.53	0.78
7	2443817.298	8.98	0.93
8	2443757.472	17.52	0.55
9	2443818.277	2.51	1.13
10	2443758.424	21.59	0.88
11	2443819.296	-0.77	0.38
12	2443759.425	21.79	0.65
13	2443820.279	-6.93	0.52
14	2443760.346	24.36	0.64
15	2443821.323	-13.93	0.55
16	2443822.336	-18.8	0.6
17	2443761.506	26.15	0.92
18	2443764.393	26.46	0.67
19	2443751.448	-14.56	0.75
20	2443752.467	-9.26	0.7
21	2444119.382	-63.33	0.81
22	2444120.407	-63.9	0.79

Sıra No	HJD	VR(km/s)	e_VR(km/s)
23	2444121.367	-63.77	0.72
24	2444124.319	-62.7	1.3
25	2444125.325	-60.19	0.94
26	2443888.258	-53.07	1.53
27	2443889.252	-44.43	1.44
28	2444194.250	27.51	1.08
29	2444199.241	12.51	0.8
30	2444116.431	-53.87	0.78
31	2444117.402	-58.54	0.72
32	2444494.359	-29.56	1.76
33	2444495.360	-37.12	1.3
34	2444544.416	-42.93	1.05
35	2444940.294	-52.91	0.96
36	2444941.227	-48.57	0.71
37	2444932.245	-61.07	0.73
38	2445134.504	-38.34	0.92
39	2445135.509	-35.06	0.83
40	2445136.496	-28.41	0.78
41	2445137.484	-25.57	0.7
42	2445138.524	-18.17	0.81
43	2445848.529	-55.93	0.93



Şekil 5.22a. Bilinmeyen yıldızın zamana göre dikine hız eğrisinin değişimi



Şekil 5.22b. Bilinmeyen yıldızın evreye göre dikine hız değişimi.