

KOMPLEKS SAYILAR

a ve b birer reel sayı ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $z = a + bi$ şeklinde ifade edilen z sayısına **Karmaşık (Kompleks) Sayı** denir. Karmaşık sayılar kümesi **C** ile gösterilir.

$C = \{ z : z = a + bi ; a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } \sqrt{-1} = i \}$ dir.
($i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$ dir.)

$z = a + bi$ karmaşık sayısında a ya **karmaşık sayının reel (gerçel) kısmı**, b ye **karmaşık sayının imajiner (sanal) kısmı** denir ve **Re(z) = a, İm(z) = b** şeklinde gösterilir.

Örnek:

$Z_1 = 3 + 4i$, $Z_2 = 2 - 3i$, $Z_3 = \sqrt{3} + i$, $Z_4 = 7$, $Z_5 = 10i$ sayıları birer karmaşık sayıdır.

Z_1 karmaşık sayısının reel kısmı 3, imajiner kısmı 4 tür.

$Z_2 = 2 - 3i \Rightarrow \text{Re}(Z_2) = 2$ ve $\text{İm}(Z_2) = -3$,

$Z_3 = \sqrt{3} + i \Rightarrow \text{Re}(Z_3) = \sqrt{3}$ ve $\text{İm}(Z_3) = 1$,

$Z_4 = 7 \Rightarrow \text{Re}(Z_4) = 7$ ve $\text{İm}(Z_4) = 0$,

$Z_5 = 10i \Rightarrow \text{Re}(Z_5) = 0$ ve $\text{İm}(Z_5) = 10$ dur.

Örnek:

$x^2 - 2x + 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Verilen denklemde $a = 1$, $b = -2$, $c = 5$ tir.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.5 = -16 = 16.i^2$

$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16i^2}}{2.1} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$ dir.

$\mathcal{C} = \{ 1 - 2i, 1 + 2i \}$ dir.

İ 'NİN KUVVETLERİ

$i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, ...

Görüldüğü gibi i nin kuvvetleri ; 1, i, -1, -i, değerlerinden birine eşit olmaktadır.

Buna göre , $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$i^{4n} = 1$

$i^{4n+1} = i$

$i^{4n+2} = -1$

$i^{4n+3} = -i$ dir

Örnek:

$(i^{14} + i^{15} + 1).(i^{99} + i^{100} - 1)$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm:

$i^{14} = (i^4)^3.i^2 = 13.(-1) = -1$

$$\begin{aligned}i^{15} &= (i^4)^3 \cdot i^3 = 13 \cdot (-i) = -i \\i^{99} &= (i^4)^{24} \cdot i^3 = 124 \cdot (-i) = -i \\i^{100} &= (i^4)^{25} = 125 = 1 \text{ olduğu için,}\end{aligned}$$

$$(i^{24} + i^{15} + 1) \cdot (i^{99} + i^{100} - 1) = (-1 - i + 1) \cdot (-i + 1 - 1) = (-i) \cdot (-i) = i^2 = -1 \text{ dir.}$$

İKİ KARMAŞIK SAYININ EŞİTLİĞİ

$$\begin{aligned}Z_1 &= a + bi \\Z_2 &= c + di\end{aligned} \text{ olsun. } Z_1 = Z_2 \leftrightarrow (a = c \text{ ve } b = d) \text{ dir.}$$

Reel kısımları ve imajiner kısımları kendi aralarında eşit olan iki karmaşık sayı eşittir.

Örnek:

$$Z_1 = a + 3 + 2bi + 3i$$

$$Z_2 = 8 + (a + b)i$$

$$Z_1 = Z_2 \text{ olduğuna göre, } b \text{ değerini bulalım.}$$

Çözüm:

$$Z_1 = (a + 3) + (2b + 3)i, Z_2 = 8 + (a + b)i \text{ ve } Z_1 = Z_2 \text{ olduğundan,}$$

$$a + 3 = 8 \Rightarrow a = 5$$

$$2b + 3 = a + b \Rightarrow 2b + 3 = 5 + b \Rightarrow b = 2 \text{ dir.}$$