

doğrusal programlama

---

**DOĞRUSAL  
PROGRAMLAMA  
(GENEL)**

# doğrusal programlama

---

**Belirli bir amacın gerçekleşmesini etkileyen bazı kısıtlayıcı koşulların ve bu kısıtlayıcı koşulların doğrusal eşitlik ya da eşitsizlik biçiminde verilmesi durumunda amaca en uygun çözümün bulunmasını sağlayan bir matematiksel yönetimdir.**

**Amaç fonksiyonunu en büyük veya en küçük yapacak en iyi çözüme adım adım yaklaşan bir algoritma (hesaplama yöntemi) 'dır.**

## **UYGULANDIĞI ALANLAR**

Yatırım ve üretim planlamasında  
Ulaştırma sorunlarının çözümünde,  
İşletmelerin kuruluş yerlerinin saptanması,  
Beslenme problemlerinin çözümünde,  
İşletmelerde görevlerin planlanmasında

# doğrusal programlamanın dayandığı varsayımlar

---

- Modeldeki değişkenlerin rakamlarla ifade edilebilir (kantitatif) olması gerekir (kalitatif değişkenlerle model kurulamaz)
- Değişkenler arasında alternatif seçim olanağı olmalıdır (alternatif yoksa DP sözkonusu olamaz, örneğin bir çiftlikte tek bitki yetiştirilecekse optimizasyona gerek yoktur, çiftlikte birkaç alternatif bitki yetiştirilebilecekse, çiftlik karınının maksimum olabilmesi için hangi bitkiden ne kadar üretim yapılması gerektiği, DP ile belirlenebilir)
- Değişkenler arasında kurulan ilişkiler doğrusal olmalıdır
- DP'nin uygulanacağı işletme problemleri kısa devreli olmalıdır (örneğin tarımsal üretimde girdi ve üretim fiyatları ancak kısa dönemlerde sabit kabul edilebilir)

# doğrusal ilişki

---

$Y=a+bX$  Doğrusal ilişki (2 değişken arasında, Y bağımlı değişken, X bağımsız değişken)

$Y=b_0+b_1X_1+b_2X_2+\dots+b_nX_n$  Doğrusal ilişki (Birkaç bağımsız değişken ile bağımlı değişken arasında)

$Y=5X$  Doğrusal ilişki

$Y=3X^2$  Doğrusal değil (Eğrisel ilişki)

$Y=4+7(X)^{0.5}$  Doğrusal değil (Eğrisel ilişki)

$Y=3-8/X$  Doğrusal değil (Eğrisel ilişki)

# doğrusal programlamanın matematiksel yapısı

---

DP modelinde 3 unsur vardır

- Amaç fonksiyonu
- Kısıtlar (Kısıtlayıcı fonksiyonlar)
- Pozitiflik kısıtı (Pozitif kısıtlama)

# doğrusal programlama

## Amaç Fonksiyonu

- Kar için maksimizasyon

$$Z_{\max} = 45x_1 + 55x_2$$

- Maliyet için minimizasyon

$$Z_{\min} = 25x_1 + 5x_2$$

# doğrusal programlama

---

## Amaç Fonksiyonu

Amaç fonksiyonu  $Z$ , değişkenler  $X$  ve sabit katsayılar  $C$  ile gösterilirse, amaç fonksiyonu :

$$Z_{\max/\min} = \sum_{i=1}^n C_i X_i$$

Veya:

$$Z_{\max} = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$

biçiminde ifade edilir.

# doğrusal programlama

---

## Kısıtlar

$$5x_1 + 55x_2 \leq 50$$

$$x_1 + 7x_2 \geq 5$$

$$5x_1 = 12$$



# doğrusal programlama

---

## Kısıtlar

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} X_i \geq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} X_i \leq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

veya

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} X_i = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

# doğrusal programlama

---

## Kısıtlar

Pozitiflik kısıtı :

Doğrusal programlama modelleri gerçek problemlere uygulanır. Bu nedenle değişkenler negatif değerli olamazlar. Böylece ;

$X_1 \dots X_n \geq 0$  yazılabilir.

# doğrusal programlama

---

## Değişkenler

Modele girecek olan **değişkenler** problemi açıklayan kantitatif büyüklüklerdir. Bu değişkenlerin optimum değerleri modelin çözümü ile bulunur.

**Parametreler** ve **sabiteler** ise, bu değişkenlerin katsayılarını oluştururlar.

# doğrusal programlama

---

## Değişkenler

Modele girecek olan **değişkenler**;

$X_1, X_2, \dots, X_n$

değişkenler arasındaki ilişkileri kuran **parametreler**;

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm}$

Verilen sabit değerler (ham madde miktarları veya makine **kapasiteleri**)

$b_1, b_2, \dots, b_m$  ile ifade edilir.

# doğrusal programlama

---

## DP AŞAMALARI

1. PROBLEMİN BELİRLENMESİ
2. MODEL DEĞİŞKENLERİNİN BELİRLENMESİ
3. MODEL PARAMETRELERİNİN BELİRLENMESİ
4. MATEMATİKSEL MODELİN KURULMASI
  - Amaç fonksiyonu
  - Kısıtlar
  - Pozitiflik kısıtı
5. PROBLEMİN ÇÖZÜLMESİ (OPTİMUM ÇÖZÜM)
6. SONUÇLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ
7. SONUÇLARIN UYGULANMASI

# doğrusal programlama

---

## PROBLEMİN BELİRLENMESİ

Çözölmek istenen sorun ortaya konur.

Örneğın, işletmenin özellikleri, üretilecek alternatif ürünler, üretimde kullanılan girdiler ve miktarları, kullanılan girdilerin kapasiteleri, üretilecek ürünlerden elde edilecek gelirler, vb.

# doğrusal programlama

---

## MODEL DEĞİŞKENLERİNİN BELİRLENMESİ

Üretilcek alternatif ürünler, DP modelinin karar değişkenlerini ( $X_1, X_2, X_3, \dots$ ) oluşturur.

# doğrusal programlama

---

## MODEL PARAMETRELERİNİN BELİRLENMESİ

Üretilecek alternatif ürünlerin gelirleri veya masrafları, DP modelinin amaç fonksiyonunun katsayılarını ( $c_1, c_2, c_3, \dots$ ) oluşturur.

Üretimde kullanılan girdilerin (malların, kaynakların) miktarları, kısıtların a parametrelerini, bu kaynakların kapasiteleri ise kısıtların b parametrelerini oluşturur.



# doğrusal programlama

---

## MATEMATİKSEL MODELİN KURULMASI

- Amaç fonksiyonu  
 $Z_{\max} = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots$
- Kısıtlar  
 $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1$   
 $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2$   
.....  
 $a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m$
- Pozitiflik kısıtı  
 $X_1 \geq 0$   
 $X_2 \geq 0$   
.....

# doğrusal programlama

## MATEMATİKSEL MODELDE

---

Z: Enbüyük veya enküçük yapılacak olan amaç fonksiyonu değeri

c: Karar değişkenlerinin amaç fonksiyonuna katkısı (gelir veya masraf gibi)

X: Karar değişkenleri

a: Teknoloji katsayıları (karar değişkenlerinin üretimi için gerekli kaynak miktarları)

b: Sınırlı kaynak miktarları (kaynak kapasiteleri)

# doğrusal programlama

---

## PROBLEMİN ÇÖZÜLMESİ (OPTİMUM ÇÖZÜM)

Farklı yöntemlerle çözülebilir

- Grafik çözüm (değişken sayısı 2 veya 3 olabilir)
- Simpleks çözüm
- Bilgisayar yazılımlarıyla çözüm (LINDO, WinQSB, EXCEL Solver)

# doğrusal programlama

---

## SONUÇLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ

Elde edilen optimum çözüm sonuçlarının işletme için (yönetim açısından) uygun olup olmadığı incelenir. Uygun olmayan sonuçlar varsa ilk aşamaya geri dönülerek yeni bir model oluşturulur ve tekrar çözülür, sonuçlar yine değerlendirilir.

# doğrusal programlama

---

## SONUÇLARIN UYGULANMASI

Elde edilen optimum çözüm sonuçlarını işletmede uygulanarak en yüksek gelirin elde edilmesine çalışılır.

# ÖRNEK PROBLEM

## Örnek 2.80

Bir motosiklet şirketi piyasaya gençlerin yaz aylarında tatilde binebilmesi için küçük boyda ve değişik tipte **bisiklet ile motosiklet** imal etmeyi planlamaktadır. Şirket bu iki imalatını iki ayrı işlemin yapıldığı I ve II nolu atölyelerinde gerçekleştirmektedir. Aşağıdaki çizelgede bir adet bisiklet ile motosiklet imali için atölye işlem süreleri ve atölye kapasiteleri verilmiştir. Bir bisiklet satışından 45 TL, bir motosiklet satışından ise 55 TL kar elde edilecektir..

Yönetici ne kadar bisiklet ve motosiklet imal etsin ki karı en büyük (maksimum) olsun?

# doğrusal programlama

Atölyeler	Mallar		Kapasite (saat)
	Bisiklet	Motosiklet	
	İşlem zamanı (saat/ad.)		
I	6	4	120
II	3	10	180

# doğrusal programlama

---

## DP AŞAMALARI

1. PROBLEMİN BELİRLENMESİ (Problem verilmiş)
2. MODEL DEĞİŞKENLERİNİN (X) BELİRLENMESİ
3. MODEL PARAMETRELERİNİN (a, b, c) BELİRLENMESİ
4. MATEMATİKSEL MODELİN KURULMASI

.....

2, 3 ve 4. aşamalar için, problemin bir özetinin (sistemik özetin) hazırlanması, hata olasılığını azaltacaktır.



# doğrusal programlama

---

- A. Sistematik özet hazırlanır
  - a. Karar değişkenleri, birimleri ve türü belirlenir (pozitif, tamsayı, veya 0-1)
  - b. Karar değişkenlerinin amaç fonksiyonuna katkısı belirlenir (c katsayıları)
  - c. Kaynak kullanım miktarları belirlenir (a)
  - d. Kısıtlı kaynak miktarları belirlenir (b)
  - e. Problemin türü belirlenir (DP-pozitif, DP-tamsayı, DP-karma tamsayı vb.)
- B. Problemin modeli kurulur
  - a. Amaç fonksiyonu yazılır
  - b. Kısıtlar yazılır
  - c. Pozitiflik koşulu yazılır
- C. Matematiksel açıdan gereksiz kısıtlar varsa, bu kısıtlar modelden çıkarılır

# doğrusal programlama

Atölyeler		Mallar (X)		Kapasite (saat) (b)
		Bisiklet	Motosiklet	
		İşlem zamanı (saat/ad.)(a)		
I		6	4	120
II		3	10	180
Kar (TL/ad.) (c)		45	55	
İstenen		Maksimum karı sağlayacak üretim miktarları		
Karar Değ. (X)	Simge	$X_1$	$X_2$	
	Birim	adet	adet	
	Tür	Tam sayı	Tam sayı	
Ek Bilgi		Üretim periyodu belirtilmemiş		
Problem Türü		Tamsayı Doğrusal Programlama		

## Matematiksel Model : Doğrusal Programlama Modeli (Standart Model)

$$Z_{\max} = 45x_1 + 55x_2$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 120$$

$$3x_1 + 10x_2 \leq 180$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$