Doğrusal Programlamada Grafik Çözüm

PROBLEMİN ÇÖZÜLMESİ (OPTİMUM ÇÖZÜM)

Farklı yöntemlerle çözülebilir

- Grafik çözüm (değişken sayısı 2 veya 3 olabilir)
- Simpleks çözüm
- Bilgisayar yazılımlarıyla çözüm

Doğrusal Programlamada Grafiksel Çözüm

- En önemli özelliği:

  optimum çözüm, mümkün çözüm alanının köşelerinden birinde bulunur.

- Değişken sayısı:
  - 2 Değişken: X1, X2

    Düzlemde (2 boyutlu) doğrularla çevrilmiş bir alanın köşelerinde çözüm aranır.
  - 3 Değişken: X1, X2, X3

    Uzayda (3 boyutlu) yüzeylerle çevrilmiş bir hacmin köşelerinde çözüm aranır.
  - 3’ten fazla Değişken: X1, X2, X3, ….. Xn

    Grafik çözüm yapılamaz.

Doğrusal Programlamada Grafiksel Çözüm

- İki değişkenli doğrusal eşitsizlikler (Sayfa 64)

Doğrusal Programlamada Grafiksel Çözüm

- Örnek:
- Amaç fonksiyonu

$Z_{maks} = 10X_1 + 13X_2$

- Kısıtlar

$2X_1 + 4X_2 \leq 32$

$5X_1 + 3X_2 \leq 45$

- Grafiksel çözümde eşitsizlikler eşitlik olarak düşünülür. Buna göre; 1. ve 2. kısıtlarda;

$\mathbf{2X_1 + 4X_2 = 32}$

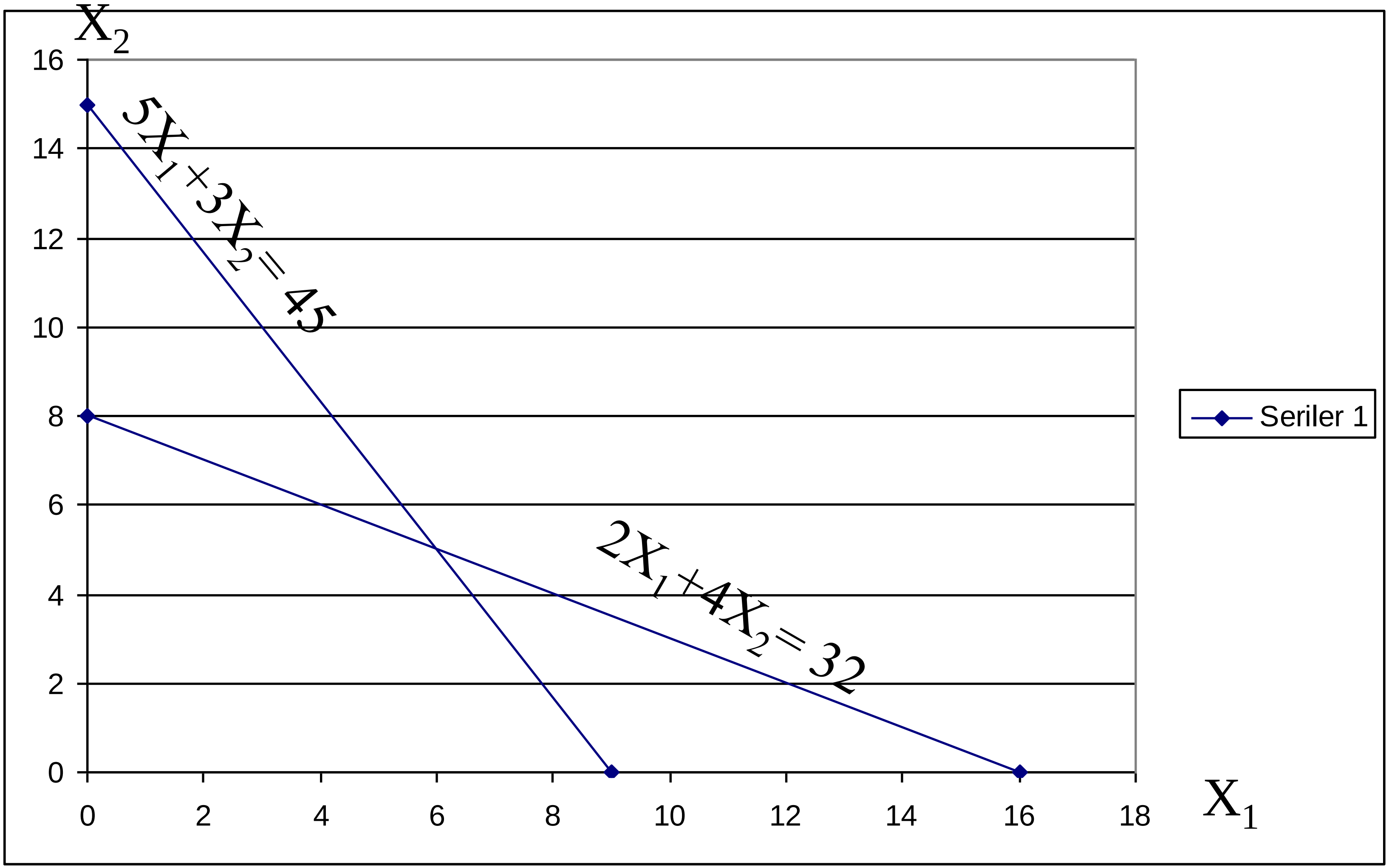
$X_1 = 0$ için $X_2 = 8$

$X_2 = 0$ için $X_1 = 16$

$\mathbf{5X_1 + 3X_2 = 45}$

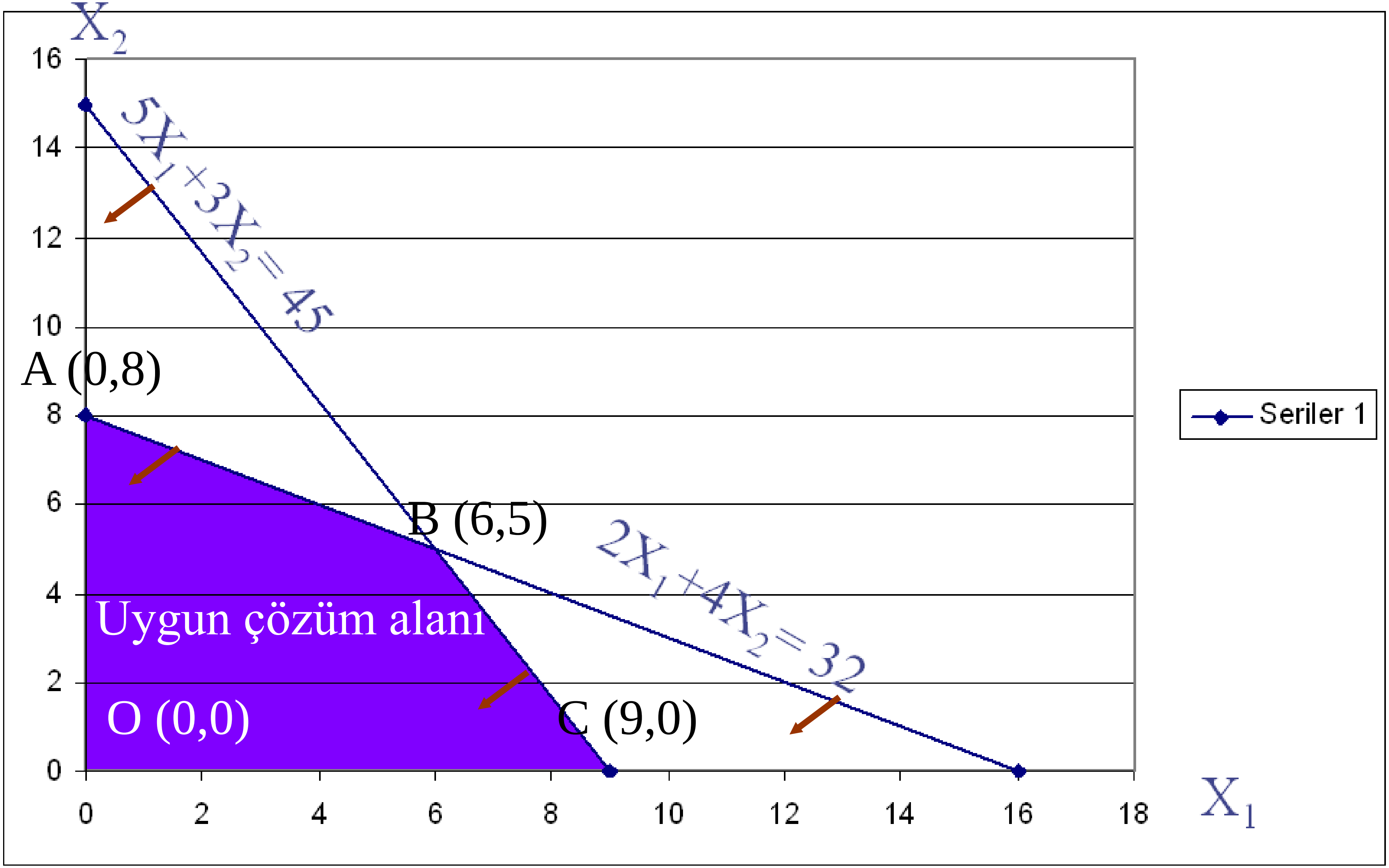
$X_1 = 0$ için $X_2 = 15$

$X_2 = 0$ için $X_1 = 9$



X_2
16
14
12
10
8
6
4
2
0
$5X_1+3X_2=45$
$2X_1+4X_2=32$
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
X_1
Seriler 1

- Doğruların ayırdığı uygun alan, yön olarak işaretlenir
- Her kısıta ilişkin doğrunun uygun alanlarının çakıştığı alan, UYGUN ÇÖZÜM ALANINI verir.



X2
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
X1
5X1+3X2= 45
2X1+4X2= 32
A (0,8)
B (6,5)
C (9,0)
O (0,0)
Uygun çözüm alanı
Seriler 1

- Örnekte uygun çözüm alanı olarak görülen taralı kısım: OABC dir.
- B noktası iki doğrunun kesiştiği nokta olduğundan bu noktanın koordinatları, iki doğrunun çözümlenmesinden elde edilir. Buna göre;
- $2X_1 + 4X_2 = 32$

$5X_1 + 3X_2 = 45$

Doğruları çözümlendiğinde $X_1 = 6$ ve $X_2 = 5$ olarak saptanır: B(6,5)

- Bu noktaların koordinatları saptandıktan sonra amaç fonksiyonunda yerine konur ve amaç fonksiyonunun değeri bulunur. Buna göre;

O, A, B ve C noktaları için amaç fonksiyonu;

$Z_{maks} = 10X_1 + 13X_2$ idi

- O (0,0) $Z_O = 10 \times 0 + 13 \times 0 = 0$
- A (0,8) $Z_A = 10 \times 0 + 13 \times 8 = 104$
- B (6,5) $Z_B = 10 \times 6 + 13 \times 5 = 125$ *
- C (9,0) $Z_C = 10 \times 9 + 13 \times 0 = 90$

Hesap edilen amaç fonksiyonunun değerleri arasında en büyük değeri veren B noktası olduğundan ($Z_B = 125$) B noktasının koordinatları optimum çözümü verir.

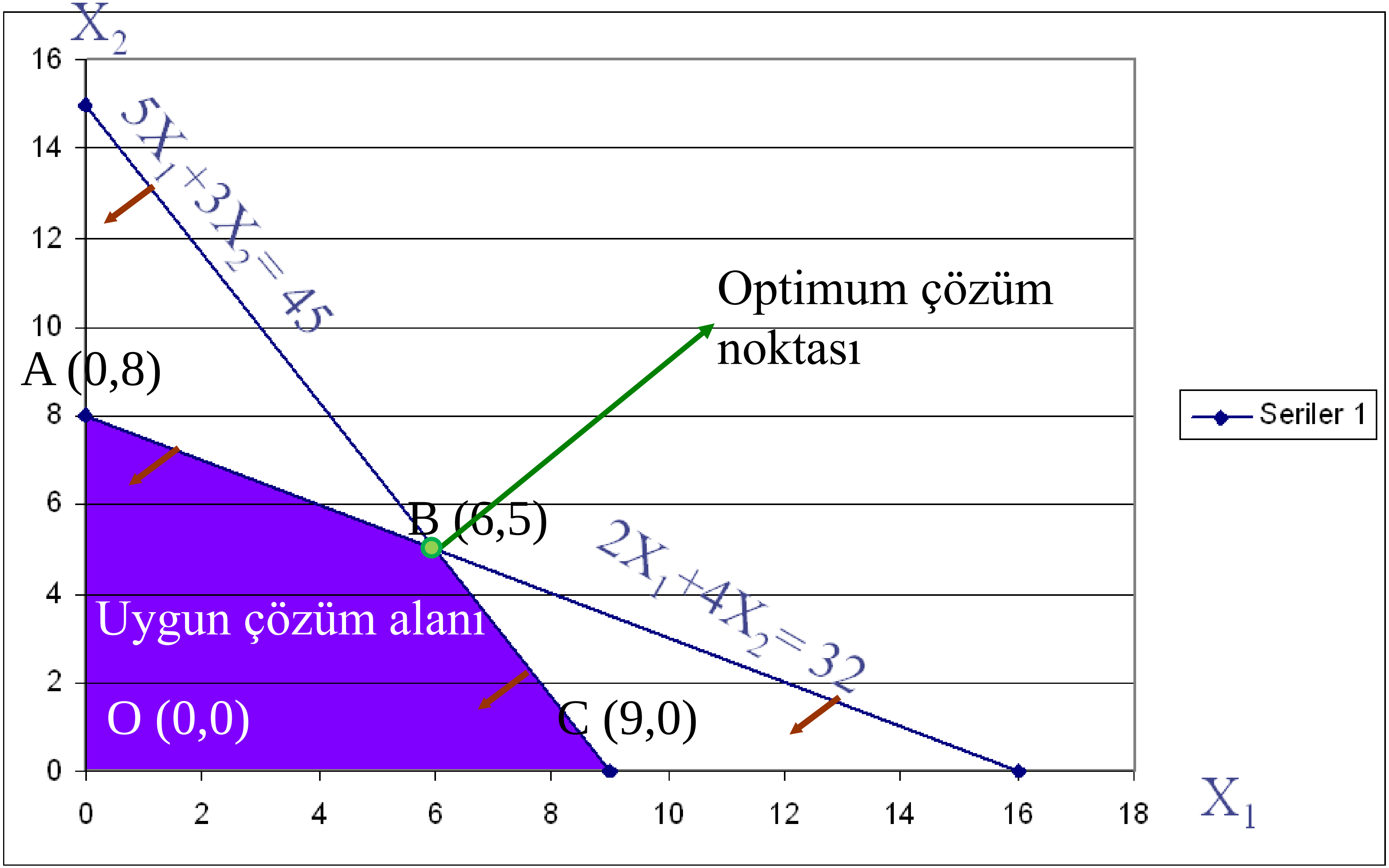
Buna göre;

Optimum çözüm:

$X_1 = 6$

$X_2 = 5$

$Z_{maks} = 125$ olur.



X_2
$5X_1+3X_2=45$
Optimum çözüm noktası
A (0,8)
B (6,5)
$2X_1+4X_2=32$
Uygun çözüm alanı
O (0,0)
C (9,0)
Seriler 1
X_1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18

Kontrol için, grafik üzerinde amaç fonksiyonu doğrusu şu şekilde çizilir;

Amaç fonksiyonu (Zmaks):

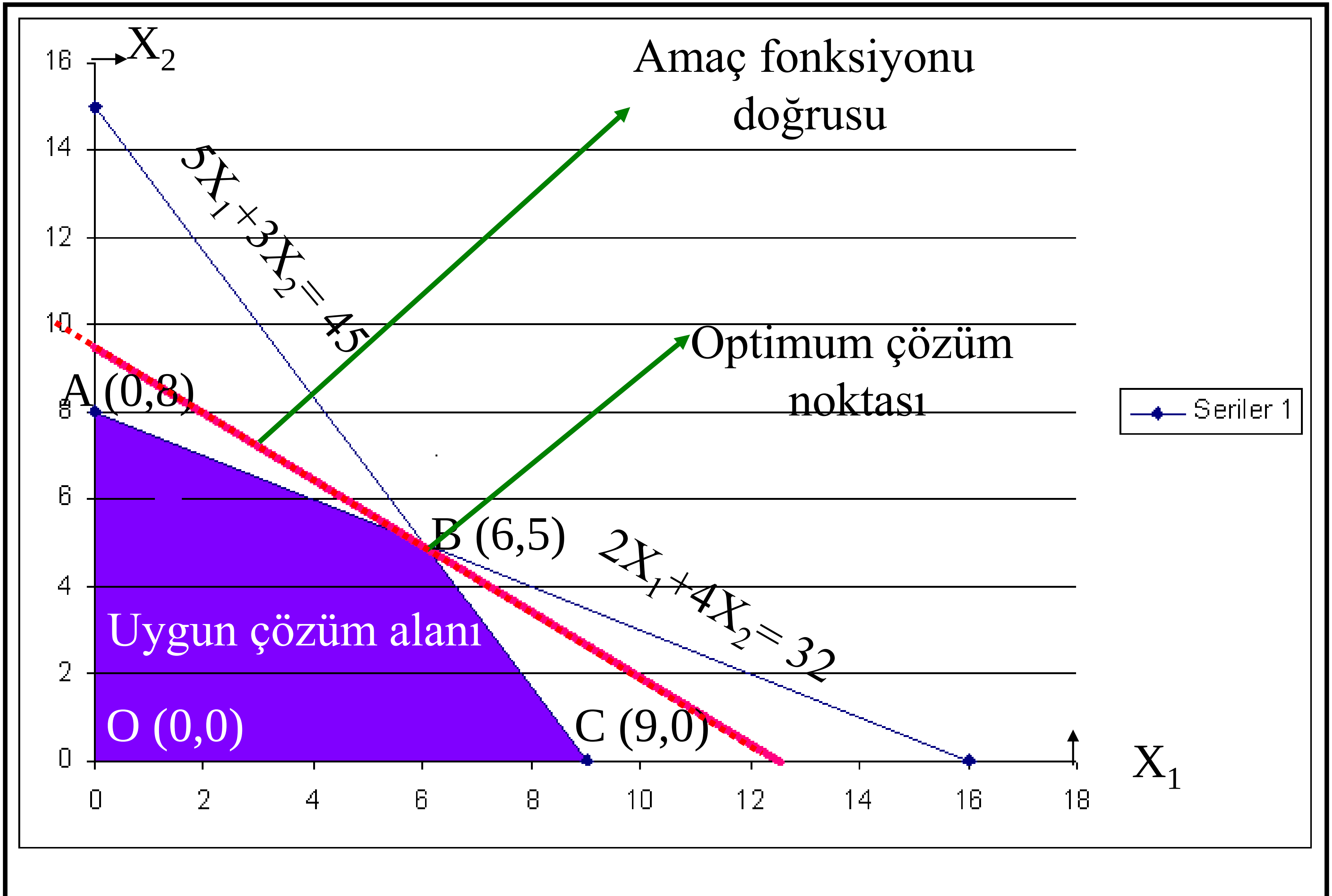
$10X_1 + 13X_2 = 125$ bulunmuştu.

Çözümlendiğinde;

$X_1 = 0$ için $X_2 = 9.6$

$X_2 = 0$ için $X_1 = 12.5$

Bu koordinatlar grafik üzerinde noktalanarak amaç fonksiyonu doğrusu elde edilir.Bu doğru kaydırıldığında, uygun çözüm alanını en son OPTİMUM ÇÖZÜM NOKTASINDA kesmelidir.



X_2
X_1
Amaç fonksiyonu doğrusu
Optimum çözüm noktası
$5X_1+3X_2=45$
$2X_1+4X_2=32$
A (0,8)
B (6,5)
C (9,0)
O (0,0)
Uygun çözüm alanı
Seriler 1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18

GRAFİK ÇÖZÜMÜN YORUMU:

Optimum çözüm (üretim miktarları):

X_1= 6 birim

X_2= 5 birim

Z_{maks}= 125 birim (maksimum gelir)

Kaynak kullanım durumu:

Kısıt 1: $2X_1 + 4X_2 \leq 32$ $2(6)+4(5) \leq 32$ $32=32$ (artan kapasite yok)

Kısıt 2: $5X_1 + 3X_2 \leq 45$ $5(6)+3(5) \leq 45$ $45=45$ (artan kapasite yok)

Grafik çözümde özel haller (Sayfa 101)

Tamsayılı Doğrusal Programlamada Grafiksel Çözüm

- Aynı örneği ele alalım, yalnız değişkenler tamsayı olsun.
- Amaç fonksiyonu

$Z_{maks} = 10X_1 + 13X_2$

- Kısıtlar

$2X_1 + 4X_2 \leq 32$

$5X_1 + 3X_2 \leq 45$

- X1, X2: Tamsayı

- Eşitsizlikler eşitlik olarak düşünülür. Buna göre; 1. ve 2. kısıtlarda;

$2X_1 + 4X_2 = 32$

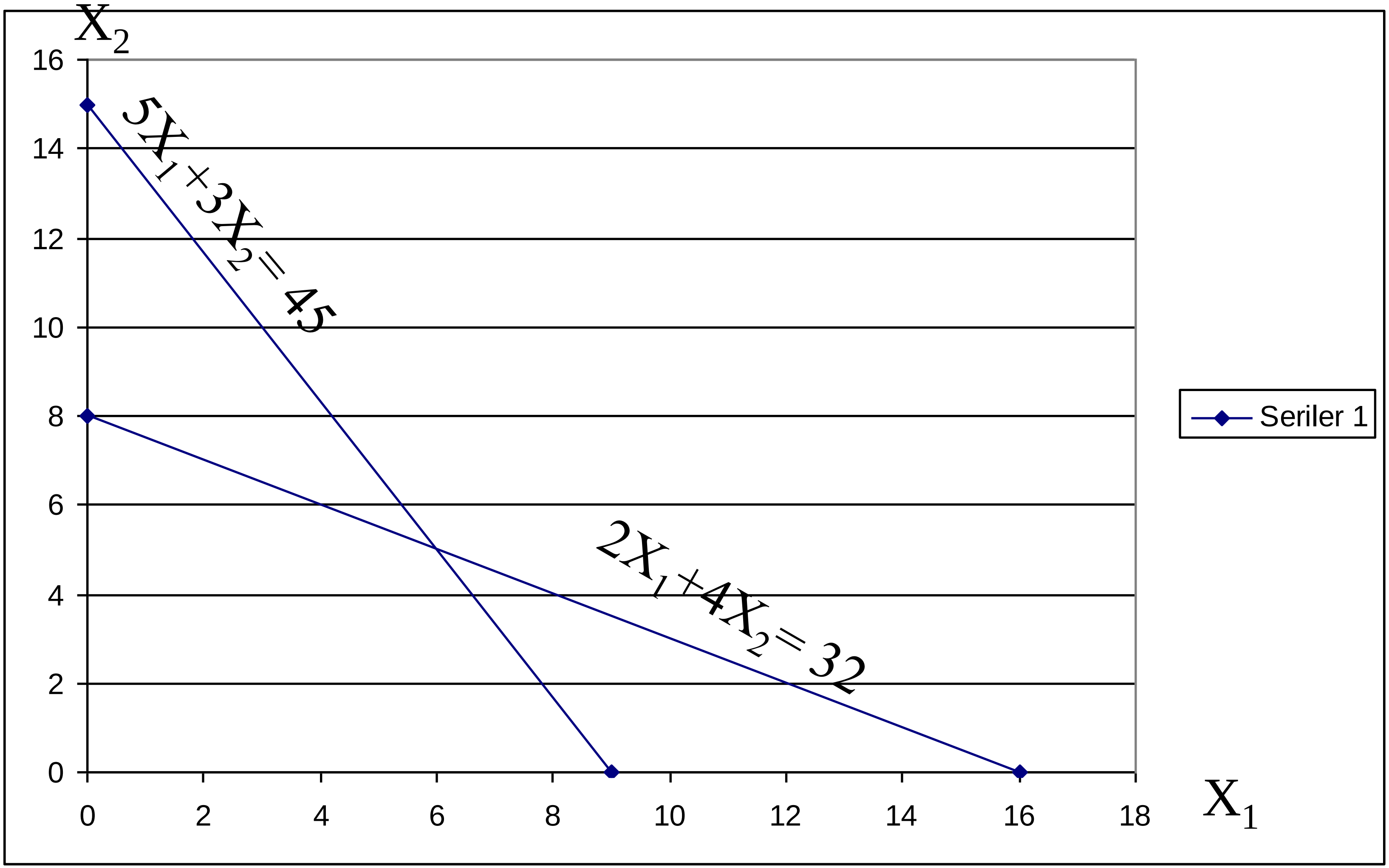
$X_1 = 0$ için $X_2 = 8$

$X_2 = 0$ için $X_1 = 16$

$5X_1 + 3X_2 = 45$

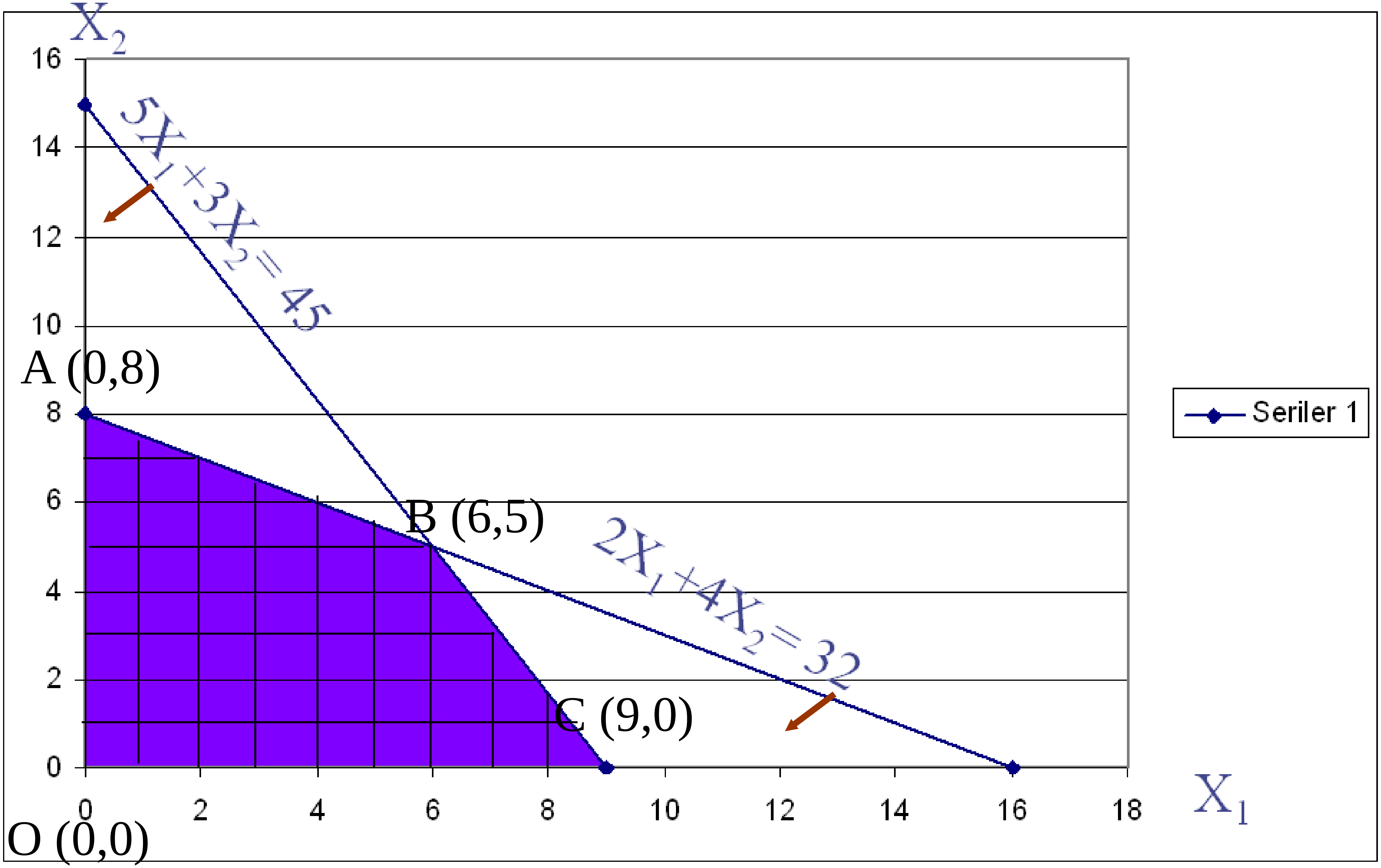
$X_1 = 0$ için $X_2 = 15$

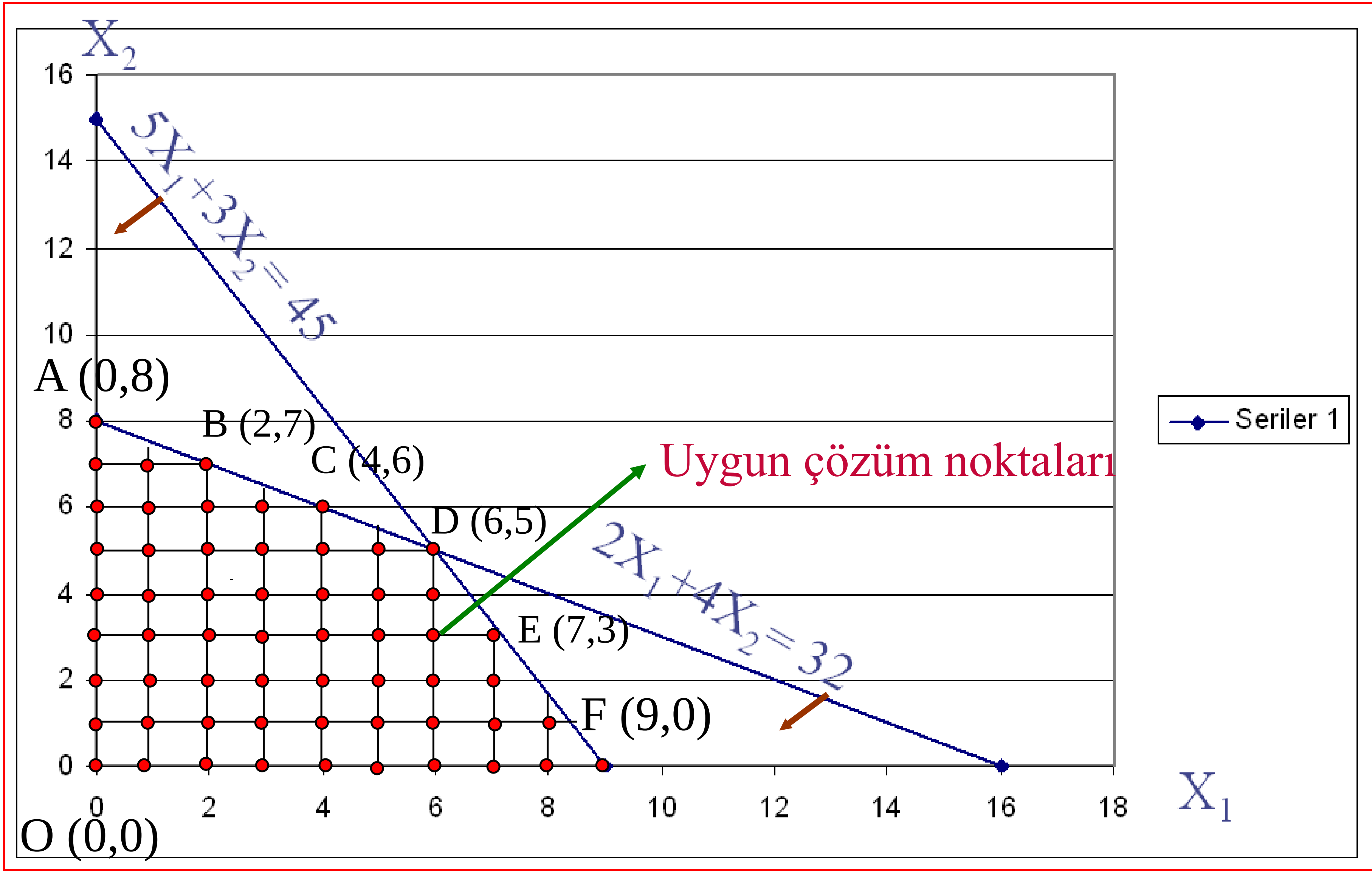
$X_2 = 0$ için $X_1 = 9$



X2
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
X1
5X1+3X2= 45
2X1+4X2= 32
Seriler 1

- Doğruların ayırdığı uygun alan, yön olarak işaretlenir
- Uygun alanların çakıştığı yerde tamsayı olan noktalardan geçen yatay ve düşey çizgiler çizilir
- Bu çizgilerin kesim noktaları işaretlenir.
- İşaretlenen bütün noktaların koordinatları tamsayıdır.


X_2
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
X_1
$5X_1+3X_2=45$
$2X_1+4X_2=32$
A (0,8)
B (6,5)
C (9,0)
O (0,0)
Seriler 1



X_2
$5X_1+3X_2=45$
A (0,8)
B (2,7)
C (4,6)
D (6,5)
E (7,3)
F (9,0)
O (0,0)
Uygun çözüm noktaları
$2X_1+4X_2=32$
X_1
Seriler 1

- Bu sınır noktaların koordinatları saptandıktan sonra amaç fonksiyonunda yerine konur ve amaç fonksiyonunun değeri bulunur. Buna göre;

  $Z_{maks} = 10X_1 + 13X_2$ idi

- O (0,0) $Z_O = 10 \times 0 + 13 \times 0 = 0$
- A (0,8) $Z_A = 10 \times 0 + 13 \times 8 = 104$
- B (2,7) $Z_B = 10 \times 2 + 13 \times 7 = 121$
- C (4,6) $Z_C = 10 \times 4 + 13 \times 6 = 118$
- D (6,5) $Z_D = 10 \times 6 + 13 \times 5 = 125$ *
- E (7,3) $Z_C = 10 \times 7 + 13 \times 3 = 109$
- F (9,0) $Z_C = 10 \times 9 + 13 \times 0 = 90$

Hesap edilen amaç fonksiyonunun değerleri arasında en büyük değeri veren D noktası olduğundan (Z_D= 125) D noktasının koordinatları optimum çözümü verir.

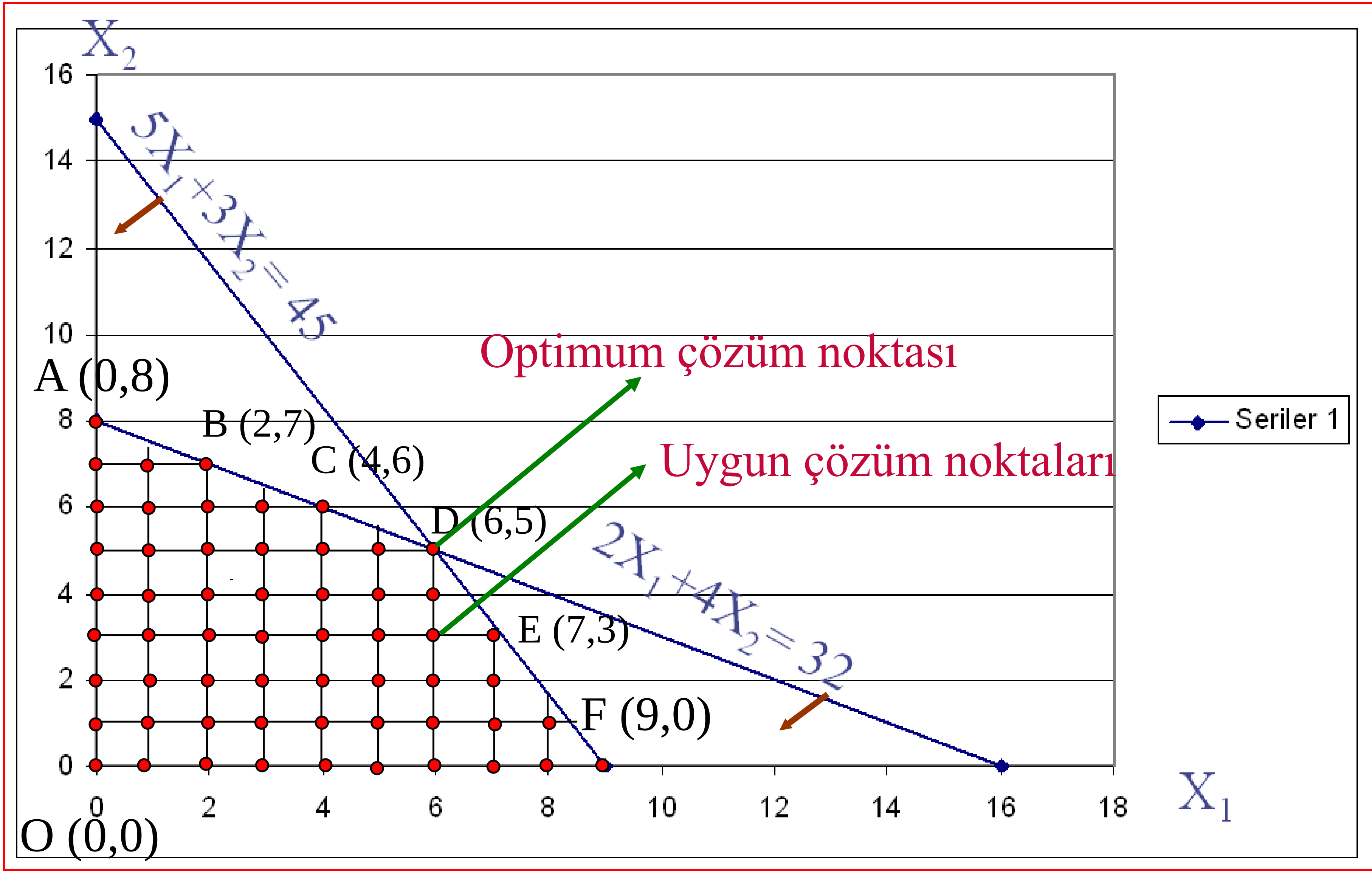
Buna göre;

Optimum çözüm:

X_1= 6 birim

X_2= 5 birim

Z_{maks}= 125 birim olur.



X_2
16
14
12
10
8
6
4
2
0
$5X_1+3X_2=45$
A (0,8)
B (2,7)
C (4,6)
D (6,5)
E (7,3)
F (9,0)
Optimum çözüm noktası
Uygun çözüm noktaları
$2X_1+4X_2=32$
Seriler 1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
X_1
O (0,0)

GENELLİKLE:

- Pozitif DP Modeli ile
- Tamsayılı DP Modeli çözüm sonuçları farklı çıkar.

- Bu örnekte pozitif DP modeli sonucu da tesadüfen tamsayı çıktığı için, iki modelin çözüm sonuçları aynı olmuştur.

KARMA TAMSAYILI DP MODELİNİN GRAFİK ÇÖZÜMÜ

- Aynı örneği ele alalım, yalnız değişkenlerden biri tamsayı olsun.
- Amaç fonksiyonu

$Z_{maks} = 10X_1 + 13X_2$

- Kısıtlar

$2X_1 + 4X_2 \leq 32$

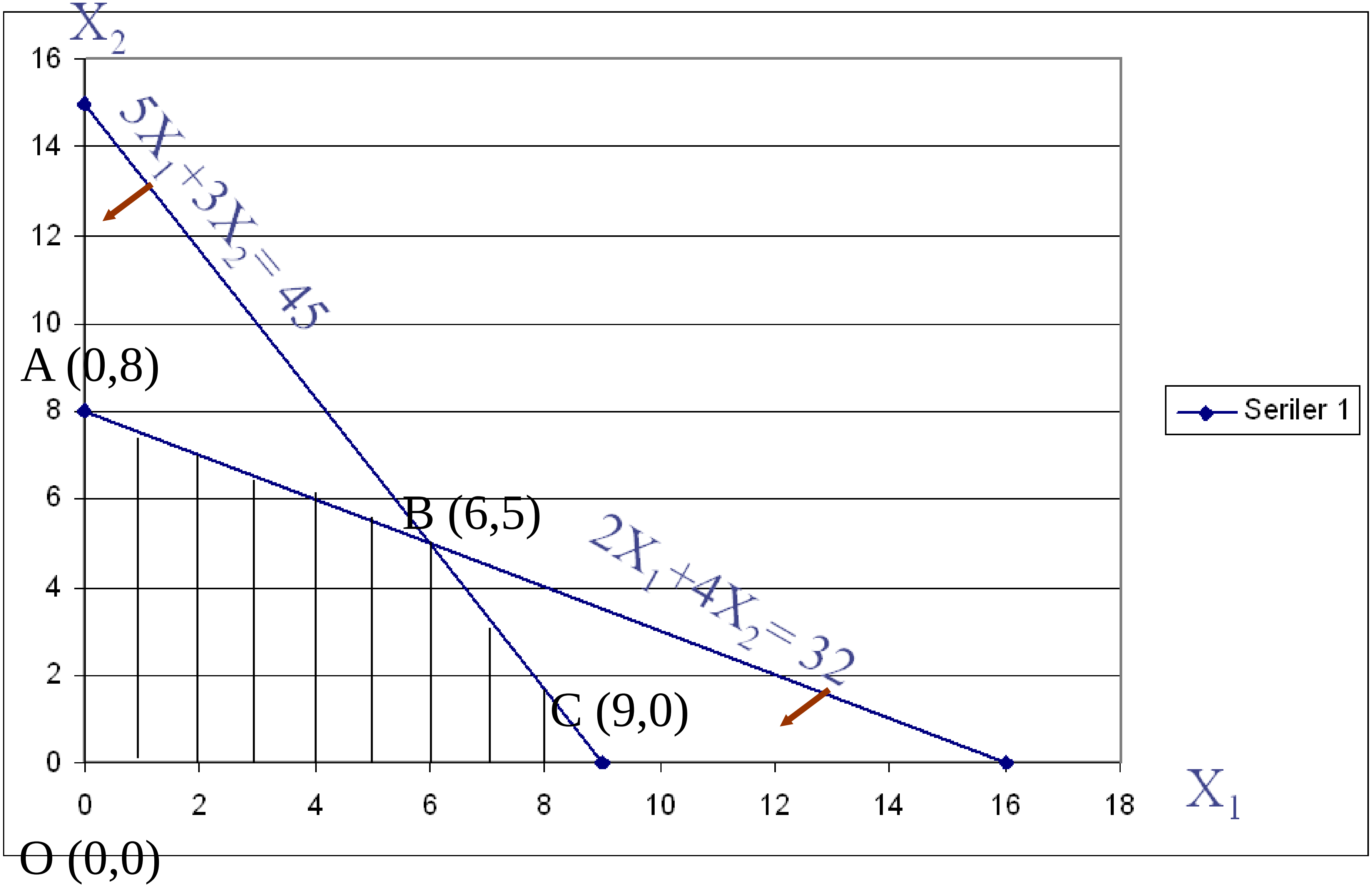
$5X_1 + 3X_2 \leq 45$

- X1: Tamsayı
- (X2: pozitif)

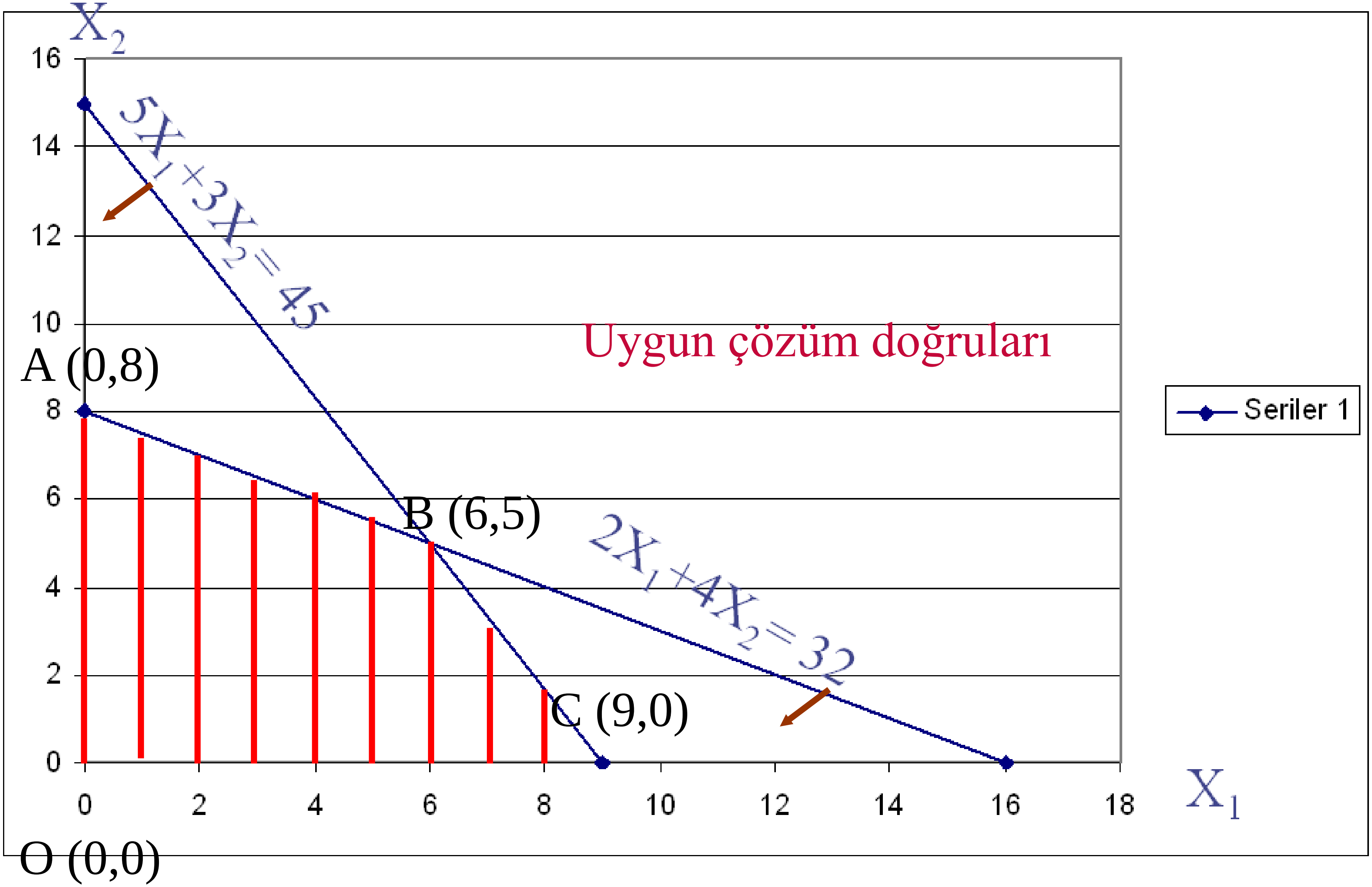
Aynı şekilde kısıtlara ilişkin doğrular çizilir ve uygun yön işaretlenir.

Uygun alanların çakıştığı yerde tamsayı olan değişken (X1) için, tamsayı noktalardan geçen doğrular çizilir (düşey doğrular)

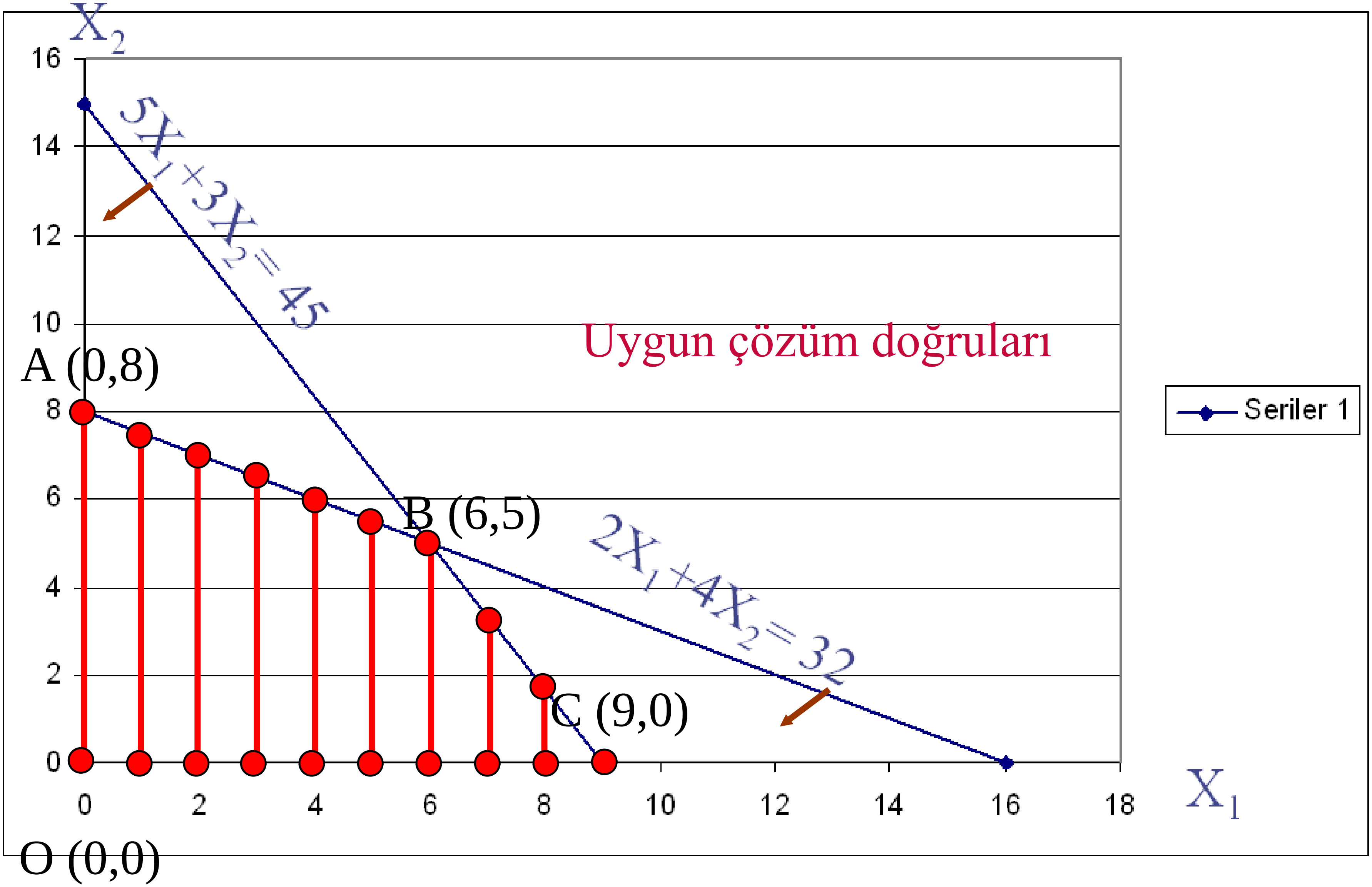
Bu doğru parçaları, uygun çözüm doğrularıdır.



X_2
$5X_1+3X_2=45$
A (0,8)
B (6,5)
$2X_1+4X_2=32$
C (9,0)
Seriler 1
X_1
O (0,0)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18



X2
X1
5X1+3X2= 45
2X1+4X2= 32
Uygun çözüm doğruları
A (0,8)
B (6,5)
C (9,0)
O (0,0)
Seriler 1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18



X_2
$5X_1+3X_2=45$
Uygun çözüm doğruları
A (0,8)
B (6,5)
$2X_1+4X_2=32$
C (9,0)
O (0,0)
X_1
Seriler 1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18

O, A, B ve C noktaları için amaç fonksiyonu;

$Z_{maks} = 10X_1 + 13X_2$ idi

- O (0,0) $Z_O = 10 \times 0 + 13 \times 0 = 0$
- A (0,8) $Z_A = 10 \times 0 + 13 \times 8 = 104$
- B (6,5) $Z_B = 10 \times 6 + 13 \times 5 = 125$ *
- C (9,0) $Z_C = 10 \times 9 + 13 \times 0 = 90$

Hesap edilen amaç fonksiyonunun değerleri arasında en büyük değeri veren B noktası olduğundan ($Z_B = 125$) B noktasının koordinatları optimum çözümü verir.

Buna göre;

Optimum çözüm:

$X_1 = 6$

$X_2 = 5$

$Z_{maks} = 125$ olur.

GENELLİKLE:

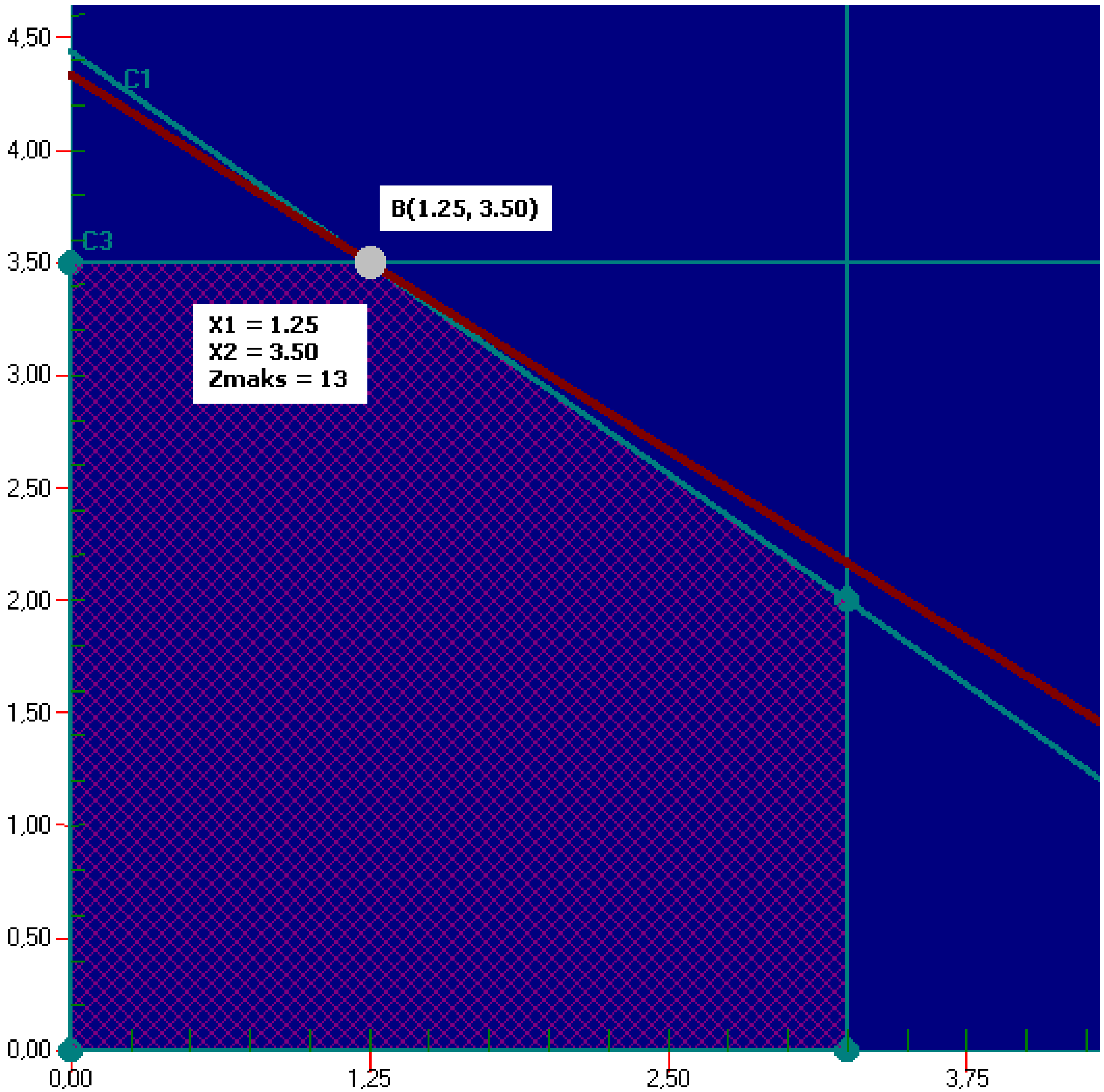
- Pozitif DP Modeli ile
- Tamsayılı DP Modeli
- Karma Tamsayılı DP Modeli
- çözüm sonuçları farklı çıkar.

- Bu örnekte pozitif DP modeli sonucu da tesadüfen tamsayı çıktığı için, üç modelin çözüm sonuçları aynı olmuştur.

- Başka bir modele ilişkin pozitif DP ve tamsayılı DP çözüm sonuçları aşağıda verilmiştir.

MODEL: Zmaks= 2X1+3X2

12X1+16X2 <= 71
4X1 <= 13
2X2 <= 17



DOĞRUSAL PROGRAMLAMA (POZİTİF) OPTİMUM ÇÖZÜM:

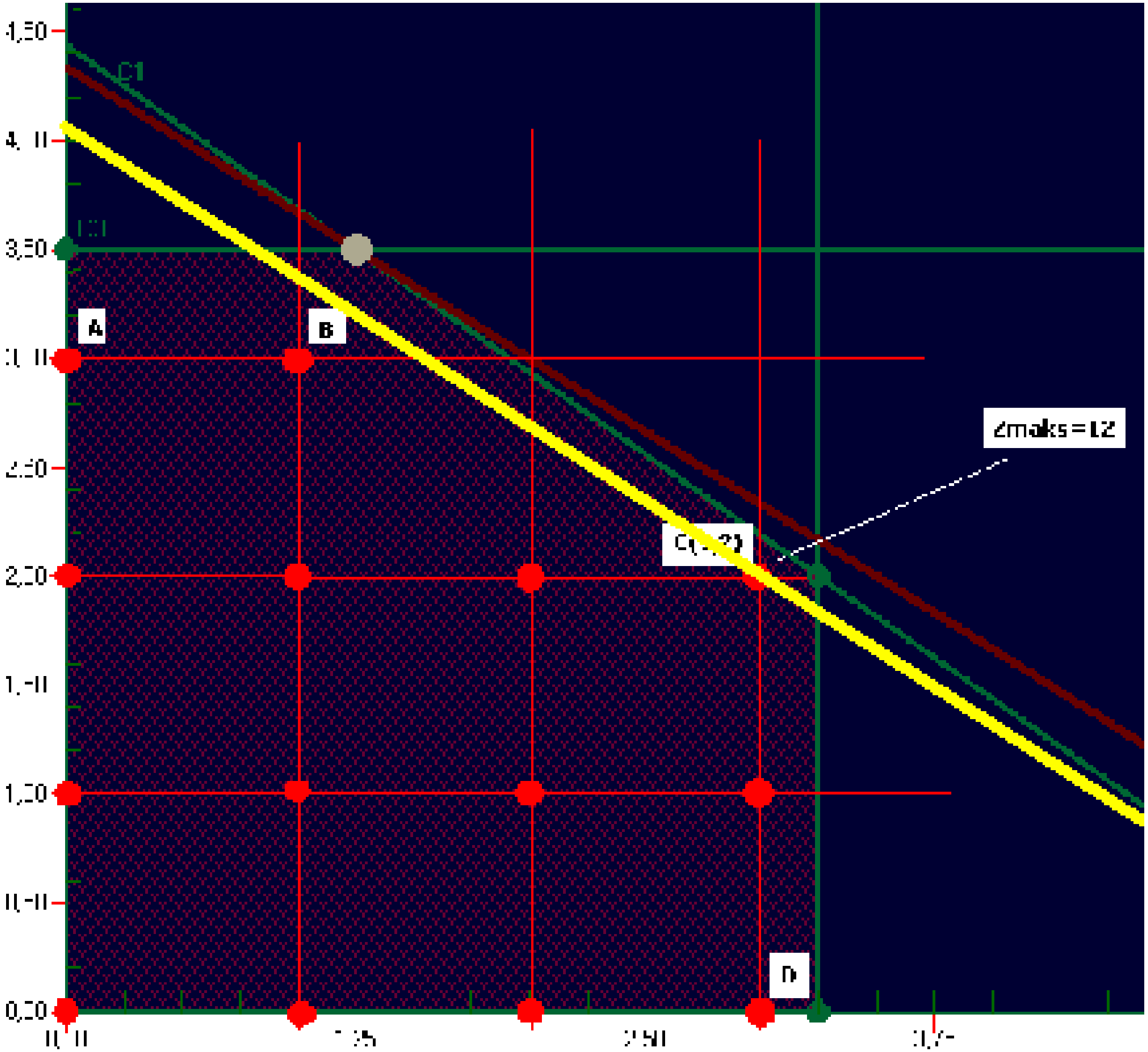
X1=1.25

X2=3.50

Zmax=13

MODEL: Zmaks= 2X1+3X2

12X1+16X2 <= 71
4X1 <= 13
2X2 <= 17



TAMSAYILI DOĞRUSAL PROGRAMLAMA OPTİMUM ÇÖZÜM:
X1=3
X2=2
Zmax=12

POZİTİF DP İLE TAMSAYILI DP SONUÇLARI FARKLI.

ÜRETİM MİKTARLARI FARKLI,

GELİR POZİTİF DP'DA DAHA YÜKSEK