

# **ATAMA (TAHSİS) MODELİ**

## **ATAMA (TAHSİS) MODELİ**

**Doğrusal programlamada kullanılan bir başka hesaplama yöntemidir. Atama problemleri, doğrusal programlama (simpleks yöntem) veya transport probleminin çözüm yöntemleri kullanılarak ta çözülebilmektedir.**

**Bu problemde  $n$  sayıdaki eleman diğer  $n$  sayıdaki işe tahsis edilir. Önemli özelliği birebir atama yapılmasıdır. Karar değişkenleri 1 veya 0 değerleri alırlar. Tahsis tipi problemler ulaştırma problemlerinde olduğu gibi belirli bölgeler arası atama (nakil) işlemlerinin en küçük masrafla gerçekleştirilmesi temeline dayanmaktadır.**

Maliyet veya Gelir ( $C_{ij}$ ) ve Atamalar ( $X_{ij}$ )

<b>İş</b> <b>Teknisyen</b>	<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>
<b>a</b>	<b>C11</b> X11	<b>C12</b> X12	<b>C13</b> X13
<b>b</b>	<b>C21</b> X21	<b>C22</b> X22	<b>C23</b> X23
<b>c</b>	<b>C31</b> X31	<b>C32</b> X32	<b>C33</b> X33

Maliyet veya Gelir ( $C_{ij}$ ) ve Atamalar ( $X_{ij}$ )

<b>İş</b> <b>Tek.</b>	<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>
<b>a</b>	<b>C11</b> 0	<b>C12</b> 1	<b>C13</b> 0
<b>b</b>	<b>C21</b> 1	<b>C22</b> 0	<b>C23</b> 0
<b>c</b>	<b>C31</b> 0	<b>C32</b> 0	<b>C33</b> 1

# **Tahsis Problemlerinin Matematiksel Formülasyonu:**

**-Amaç Fonksiyonu:**

$$Z_{enk/enb} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

**Formülasyonda  $C_{ij}$ ,  $i$  elemanından  $j$  elemana yapılan atamanın maliyetidir.**

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Bir } j \text{ işi bir } i \text{ işine tahsis edilirse} \\ 0, & \text{edilmezse} \end{cases}$$

**-Kısıtlayıcılar:**

**Her bir elemana veya makineye bir iş tahsis edildiğinde**

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Aynı biçimde her bir işe bir eleman veya makine tahsis edildiğinde

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Tahsis Probleminin Çözüm Yöntemleri:

1. Sayımla Çözüm
2. Direkt Çözüm

## 1. Sayımla Çözüm:

Bu yöntemi  $n=3$  olan basit bir örnekte görelim.

## Süreler (saat, $C_{ij}$ )

İş Tek.	I	II	III
a	18	14	17
b	15	12	14
c	14	11	15

**ÖRNEK 1:** 3 ayrı iş yapabilen 3 teknisyenin her bir iş için harcadıkları süre tablodadır.

Hangi teknisyene hangi iş (veya hangi işe hangi teknisyeni) verelim ki maliyet en küçük olsun?

Diğer bir ifadeyle her iş için harcanan zaman en küçük olsun?

$n=3$  olduğundan  $n!=3! = 1.2.3 = 6$  çözüm vardır.

Şöyle ki:



## Süreler (Cij)

İş Tek.	I	II	III
a	18	14	17
b	15	12	14
c	14	11	15

## Alternatifler:

	I	II	III	<u>Maliyet</u>	
A1	a	b	c	$18 + 12 + 15 = 45$	A1= 45
A2	a	c	b	$18 + 11 + 14 = 43$	A2= 43
A3	b	a	c	$15 + 14 + 15 = 44$	A3= 44
A4	b	c	a	$15 + 11 + 17 = 43$	A4= 43
A5	c	a	b	$14 + 14 + 14 = 42$	A5= 42 *Min
A6	c	b	a	$14 + 12 + 17 = 43$	A6= 43

**En küçük maliyeti A5 verdiğiinden**

**c teknisyeni I. işi**

**a “ II. işi**

**b “ III. işi yapmalıdır ki en düşük maliyeti bulalım.**

**Bu çözüm yöntemi ancak n sayısı küçük olduğunda geçerlidir. Çünkü n çok büyüdüğünde problemin sayısal olarak çözümlenmesi zorlaşır.**

**n=10 için alternatif sayısı:**

**n!=10!=3.628.800 olur.**

## 2. DİREKT ÇÖZÜM

### AŞAMALAR (MİNİMİZASYON PROBLEMİ İÇİN):

- 1. Her satırın en küçük değeri alınır ve bulunduğu satırdaki sayılardan çıkarılır (her satırda en az bir adet sıfır elde edilir)**
- 2. Yeni sayılarla bulunan tablonun sütunlarının en küçüğü alınır ve bulunduğu sütundaki sayılardan çıkarılır (her sütunda en az bir adet sıfır elde edilir)**
- 3. Bire bir atanma yapılıp yapılamayacağı kontrol edilir. Yapılabiliyorsa optimum çözüme ulaşılmıştır**
- 4. Bire bir atama yapılamıyorsa 0 değerli hücrelerin üzerinden geçecek şekilde en az sayıda yatay ve/veya düşey çizgiler çizerek sıfır değerli hücreler işlem dışı bırakılır**

5. Yeni sıfır değerli hücreleri oluşturmak için, üzerinden çizgi geçmeyen sayılar içinden en küçük değer seçilir ve üzerinden çizgi geçmeyen hücrelerdeki sayılardan çıkarılır, üzeri çizilen satır ve sütunların kesiştikleri hücrelerdeki sayılara ilave edilir
6. En az sayıda çizilen çizgilerin sayısı, modeldeki satır ve sütun sayısına eşit ise optimum çözüme ulaşılmıştır. Elde edilen tablodaki sıfırlı hücrelere uygun dağıtım yapılır.
7. Çizgilerin sayısı, modeldeki satır ve sütun sayısına eşit değil ise 4. Aşamaya dönülür ve çizgilerin sayısı, modeldeki satır ve sütun sayısına eşit olana kadar işleme devam edilir.

## **Örnek 2:**

**Bir imalat atölyesinde 4 türlü iş ve bunların 4'ünü de yapacak kalifiyede 4 teknisyen vardır. Teknisyenlerin bu işleri ne kadar sürede (saat, dakika, saniye vb.) yaptıkları tabloda verilmiştir. Hangi işi hangi teknisyene verelim ki veya hangi teknisyeni hangi işe atayalım ki toplam harcanan süre en küçük olsun?**

## Tablo 1. Süreler (Cij)

Tek İş.	X	Y	Z	K
1	8	20	17	11
2	13	28	4	26
3	38	19	18	15
4	19	26	24	10

Çözümü adım adım yapalım.

**1.Adım:** Her satırın en küçük değeri alınır ve bulunduğu satırdaki öğelerden çıkarılır.

1. Satırın en küçük değeri = 8

2. “ “ “ “ = 4

3. “ “ “ “ = 15

4. “ “ “ “ = 10

Tablo 2.

Tek İş.	X	Y	Z	K
1	$8-8=$ 0	$20-8=$ 12	$17-8=$ 9	$11-8=$ 3
2	$13-4=$ 9	$28-4=$ 24	$4-4=$ 0	$26-4=$ 22
3	$38-15=$ 23	$19-15=$ 4	$18-15=$ 3	$15-15=$ 0
4	$19-10=$ 9	$26-10=$ 16	$24-10=$ 14	$10-10=$ 0

Tek İş.	X	Y	Z	K
1	8	20	17	11
2	13	28	4	26
3	38	19	18	15
4	19	26	24	10

Tablo 3.

Tek İş.	X	Y	Z	K
1	0	12	9	3
2	9	24	0	22
3	23	4	3	0
4	9	16	14	0



**2.Adım:Yeni öğelerle bulunan tablonun sütunlarının en küçüğü alınır ve bulunduğu sütundaki öğelerden çıkarılır.**

**X sütununun en küçük değeri = 0**

**Y “ “ “ “ = 4**

**Z “ “ “ “ = 0**

**K “ “ “ “ = 0**

Tablo 4.

Tek İş.	X	Y	Z	K
1	0	12-4= 8	9	3-0= 3
2	9	24-4= 20	0	22-0= 22
3	23	4-4= 0	3	0-0= 0
4	9	16-4= 12	14	0-0= 0

Tek İş.	X	Y	Z	K
1	0	12	9	3
2	9	24	0	22
3	23	4	3	0
4	9	16	14	0

**Tablo 5.**

Tek İş.	X	Y	Z	K
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>9</b>	<b>20</b>	<b>0</b>	<b>22</b>
<b>3</b>	<b>23</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>0</b>
<b>4</b>	<b>9</b>	<b>12</b>	<b>14</b>	<b>0</b>

**3. Adım: Bütün satır ve sütunlarda “0” değeri elde edilmiştir ve bire bir atama yapılabilmektedir. O halde optimum çözüme ulaşılmıştır.**

**X teknisyeni 1. işe,**

**Y teknisyeni 3. işe,**

**Z teknisyeni 2. işe,**

**K teknisyeni (3 veya 4’e, ancak Y teknisyeni 3’e atandığından) 4. işe.**

**$Z_{min} = 8+19+4+10 = 41$  birim.**

**Tablo 6. Optimum Çözüm  
(Cij ve Xij değerleri)**

<b>Tek İş.</b>	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>Z</b>	<b>K</b>
<b>1</b>	<b>8</b> <b>1</b>	<b>20</b> <b>0</b>	<b>17</b> <b>0</b>	<b>11</b> <b>0</b>
<b>2</b>	<b>13</b> <b>0</b>	<b>28</b> <b>0</b>	<b>4</b> <b>1</b>	<b>26</b> <b>0</b>
<b>3</b>	<b>38</b> <b>0</b>	<b>19</b> <b>1</b>	<b>18</b> <b>0</b>	<b>15</b> <b>0</b>
<b>4</b>	<b>19</b> <b>0</b>	<b>26</b> <b>0</b>	<b>24</b> <b>0</b>	<b>10</b> <b>1</b>

### Örnek 3:

Bir buzdolabı firması, yurt çapında servis hizmetlerini, ellerindeki 5 değişik şehirdeki servis istasyonlarıyla yürütmektedir. Servis istasyonları her hafta ancak bir bölgeye gidebilmektedir. Aşağıdaki tabloda 5 servis istasyonunun gitmek zorunda olduğu diğer 5 bölgeye olan uzaklıkları km olarak verilmiştir. Buzdolabı firması, 5 servis istasyonunun gitmek zorunda bulunduğu bölgelere en kısa seyahat süresiyle veya en az km başına masrafla gidebilmesi için nasıl bir program yapmalıdır?

Böl Ser.	A	B	C	D	E
1	110	220	80	180	230
2	90	70	130	60	180
3	130	190	150	120	160
4	210	240	170	300	260
5	140	100	120	110	150

Tablo 1 . Uzaklık ( km)

Çözüm :

1.Adım:Her sütunun en küçük değeri alınır ve sütunun elemanlarından çıkarılır.

Böl Ser.	A	B	C	D	E
1	20	150	0	120	80
2	0	0	50	0	30
3	40	120	70	60	10
4	120	170	90	240	110
5	50	30	40	50	0

Tablo 2 .

2.Adım: Elde edilen tabloda her satırın en küçük elemanı alınır ve diğer (satırdaki) elemanlardan çıkarılır.

Böl. Ser.	A	B	C	D	E
1	20	150	0	120	80
2	0	0	50	0	30
3	30	110	60	50	0
4	30	80	0	150	20
5	50	30	40	50	0

Tablo 3 .



Tablo 3 de görüldüğü gibi her satır ve sütunda 0 değeri mevcuttur. Atama yapmaya çalışırsak:

Atama:

Böl. Ser.	A	B	C	D	E
1	20	150	0	120	80
2	0	0	50	0	30
3	30	110	60	50	0
4	30	80	0	150	20
5	50	30	40	50	0

Atama:

Böl. Ser.	A	B	C	D	E
1	20	150	0	120	80
2	0	0	50	0	30
3	30	110	60	50	0
4	30	80	0	150	20
5	50	30	40	50	0

Atama:

Böl. Ser.	A	B	C	D	E
1	20	150	0	120	80
2	0	0	50	0	30
3	30	110	60	50	0
4	30	80	0	150	20
5	50	30	40	50	0

Atama:

Böl. Ser.	A	B	C	D	E
1	20	150	0	120	80
2	0	0	50	0	30
3	30	110	60	50	0
4	30	80	0	150	20
5	50	30	40	50	0

Bire bir atama yapılamamaktadır

Optimum çözümlü bulmak için:

Tablo 3. de 0 değerli hücrelerin üzerinden geçecek şekilde en az sayıda yatay ve düşey çizgiler çizerek sıfır değerli hücreler işlem dışı bırakılır.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta , sıfırlı hücrelerin en az çizgi çizmek koşuluyla işlem dışı bırakılmasıdır.

Örneğimizde 2. satırda üç adet sıfır var. Bu üç sıfırlı hücreyi işlem dışı bırakmak için üzerlerine bir çizgi çizmek yeterlidir. Aynı biçimde C ve E sütunları üzerine de çizgi çizilir.

Tablo 4.

Böl. Ser.	A	B	C	D	E
1	20	150	0	120	80
2	0	0	50	0	30
3	30	110	60	50	0
4	30	80	0	150	20
5	50	30	40	50	0

1.  
Doğru

3.D.

2. D.



Çizgilerin sayısı, modeldeki satır ve sütun sayısına eşit ise elde edilen tablodaki sıfırlı hücrelere uygun dağıtımın, yeni tahsisin yapılmasıyla optimum çözüme ulaşılmış olur.

Yeni sıfır değerli hücreleri oluşturmak için, üzerinden çizgi geçmeyen sayılar içinden en küçük değer seçilir ve üzerinden çizgi geçmeyen değerlerden çıkarılır. Ancak bu en küçük değer üzeri çizilen satır ve sütunların kesiştikleri hücrelere ilave edilir.

Tablo 5.

Böl. Ser.	A	B	C	D	E
1	0	130	0	100	80
2	0	0	70	0	50
3	10	90	60	30	0
4	10	60	0	130	20
5	30	10	40	30	0

1.D.

4.D.

3.D.

2.D.

Yeni Tablomuzaya göre yeniden sıfırlı hücre oluşturmamız gerekir.

Yeni tablo aşağıdaki gibi olur.

Böl. Ser.	A	B	C	D	E
1	0	120	0	90	80
2	10	0	80	0	60
3	10	80	60	20	0
4	10	50	0	120	20
5	30	0	40	20	0

4.D. 5.D. 3.D. 2.D.

1.D.

Tablo 6.

5.çizgi çizildiğinde (sadır ve sütun sayısı eşit )  
çözümüne ulaşılmış olur.Atama ve tablo şöyledir.

Böl. Ser.	A	B	C	D	E
1	0	120	0	90	80
2	10	0	80	0	60
3	10	80	60	20	0
4	10	50	0	120	20
5	30	0	40	20	0

Tablo 6. Optimum Çözüm

## Optimum Çözüm

- 1.Servis A bölgesine :110 km
- 2.Servis D bölgesine : 60 km
- 3.Servis E bölgesine : 160 km
- 4.Servis C bölgesine : 170 km
- 5.Servis B bölgesine : 100 km

Toplam : 600 km

$Z_{\min} = 600 \text{ km}$

**Örnek 4: Bir resim galerisinde satışa sunulan 4 resim vardır. Her müşterinin ödemeye hazır olduğu fiyatlar aşağıdaki tabloda verilmiştir. Tablo satışlarından maksimum karı elde etmek için hangi müşteri hangi resmi almalıdır.**

### **Fiyat teklifleri (YTL)**

<b>RESİM</b>	<b>R1</b>	<b>R2</b>	<b>R3</b>	<b>R4</b>
<b>MÜŞTERİ</b>				
<b>M1</b>	<b>8</b>	<b>11</b>	<b>-</b>	<b>-</b>
<b>M2</b>	<b>9</b>	<b>13</b>	<b>12</b>	<b>7</b>
<b>M3</b>	<b>9</b>	<b>-</b>	<b>11</b>	<b>-</b>
<b>M4</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>12</b>	<b>9</b>

**(-) ile ifade edilen yerler müşterilerin teklif vermediği resimlere aittir dolayısıyla boş (-) olan yerler –M rakamı konularak yeniden düzenlenir (M: büyük bir sayı) M=100 alalım)**

<b>RESİM MÜŞTERİ</b>	<b>R1</b>	<b>R2</b>	<b>R3</b>	<b>R4</b>
<b>M1</b>	<b>8</b>	<b>11</b>	<b>-100</b>	<b>-100</b>
<b>M2</b>	<b>9</b>	<b>13</b>	<b>12</b>	<b>7</b>
<b>M3</b>	<b>9</b>	<b>-100</b>	<b>11</b>	<b>-100</b>
<b>M4</b>	<b>-100</b>	<b>-100</b>	<b>12</b>	<b>9</b>

**Çözüm: Bu problemde maksimizasyon olduğu için her satırdaki en büyük değerden diğer satır elemanları çıkarılır.**

<b>RESİM MÜŞTERİ</b>	<b>R1</b>	<b>R2</b>	<b>R3</b>	<b>R4</b>
<b>M1</b>	<b>11-8= 3</b>	<b>11-11= 0</b>	<b>11-(-100)= 111</b>	<b>11-(-100)= 111</b>
<b>M2</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>6</b>
<b>M3</b>	<b>2</b>	<b>111</b>	<b>0</b>	<b>111</b>
<b>M4</b>	<b>112</b>	<b>112</b>	<b>0</b>	<b>3</b>



### 3. Aşama: Sütunlardaki en küçük rakam, diğer sütun elemanlarından çıkarılır.

RESİM MÜŞTERİ	R1	R2	R3	R4
M1	3-2= 1	0	111	108
M2	4-2= 2	0	1	3
M3	2-2= 0	111	0	108
M4	112-2= 110	112	0	0

Bu tabloda uygun atama yapılamadığından sıfırların üstünden geçen en az sayıda çizgiler çizilir ve üzerinden çizgi geçmeyen en küçük değerli eleman işleme alınır. Bu eleman (1), üzerinden çizgi geçmeyen elemanlardan çıkarılır, çizgilerin kesim noktasındaki elemanlara eklenir.

<b>RESİM MÜŞTERİ</b>	<b>R1</b>	<b>R2</b>	<b>R3</b>	<b>R4</b>
<b>M1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>111</b>	<b>108</b>
<b>M2</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>3</b>
<b>M3</b>	<b>0</b>	<b>111</b>	<b>0</b>	<b>108</b>
<b>M4</b>	<b>110</b>	<b>112</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

<b>RESİM MÜŞTERİ</b>	<b>R1</b>	<b>R2</b>	<b>R3</b>	<b>R4</b>
<b>M1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>110</b>	<b>107</b>
<b>M2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>2</b>
<b>M3</b>	<b>0</b>	<b>112</b>	<b>0</b>	<b>108</b>
<b>M4</b>	<b>110</b>	<b>113</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

## **Optimum çözüm**

- 1.müşteri 1 nolu resmi**
- 2.müşteri 2 nolu resmi**
- 3.müşteri 3 nolu resmi**
- 4. müşteri 4 nolu resmi almalıdır**

# Optimum Çözüm

RESİM MÜŞTERİ	R1	R2	R3	R4
M1	8 1	11 0	-	-
M2	9 0	13 1	12 0	7 0
M3	9 0	-	11 1	-
M4	-	-	12 0	9 1

**Toplam gelir:  $Z_{max} = 8+13+11+9$**

**$Z_{max} = 41$  milyar TL**