İNTERPOLASYON

İnterpolasyonda amaç x_0, x_1, x_2, ... , x_n noktaları için verilen f_0, f_1, f_2, ... , f_n ölçümlerinden yararlanarak x_i - x_{1+1} arasındaki herhangi bir x için bir F(x) aradeğeri bulmaktır. Bu bölümde bu amaçla geliştirilmiş yöntemleri görecek ve değerlendireceğiz.

1. Doğrusal İnterpolasyon

Verilen (a, f(a)), (b, f(b)) noktalarından yararlanarak a – b arasında herhangi bir x için F(x) değeri, bu noktalar arasındaki değişimin doğrusal olduğu varsayılarak bulunabilir.

(a, f(a)), (b, f(b)) noktalarından geçen doğrunun denkleminin

F(x) = Ax + B olduğunu varsayalım. Doğru a, f(a)), (b, f(b)) noktalarından geçtiği için

F(a) = f(a), F(b) = f(b) olacaktır. Buradan haraketle

Aa + B = f(a)
Ab + B = f(b) olacaktır. Her iki nokta bilindiğinden bu noktalardan geçen doğru denkleminin katasyıları A ve B bu durumda;

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad B = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

Doğru denklemi ise;

$$F(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$ olur.

Verilen iki nokta arasındaki değişimin doğrusal olduğu varsayımı ile yapılan hatanın üst sınırı;

$$R(x) = F(x) - f(x) = \frac{|(x-a)(x-b)|}{2} f'''(c)\text{, a < c < b}$$ ile verilir.

Eğer verilen noktalar arasında değişim gerçekten doğrusal ise f'’(c) = 0 olur. Yani hata yapılmamıştır, zira interpolasyon da doğrusaldır.

Örn: f(x) = e^x fonksiyonun 0.2 ve 0.3 noktlarındaki değeri sırasıyla 1.22140 ve 1.34986’dır. Doğrusal interpolasyon yöntemiyle F(0.26) değerini bulunuz ve bu değerin bağıl hatasını hesaplayınız.

$$F(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

$$F(x) = \frac{1.34986 - 1.22140}{0.3 - 0.2} x + \frac{0.3 * 1.22410 - 0.2 * 1.34986}{0.3 - 0.2}$$

$$F(x) = 1.28460x + 0.96448$$
$$F(0.26) = 1.28460 * 0.26 + 0.96448 = 1.29848$$

Bu değer üzerindeki bağıl hata;

$$\varepsilon_a = \frac{|x_t - x|}{x_t} = \frac{|f(0.26) - F(0.26)|}{f(0.26)} = \frac{|e^{0.26} - 1.29848|}{e^{0.26}} = 0.03735 = \%3.735$$

2. Gregory-Newton İleri İnterpolasyon Yöntemi

$$F(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + ... + (r,n)\Delta^n f_0$$

Burada (r,n); r'nin n'li kombinasyonlarının sayısını, $\triangle^n f_0$ ise ileri sonlu farkları göstermektedir.

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$
$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$$
$$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$$
...
$$\Delta^n f_0 = \Delta^{n-1} f_1 - \Delta^{n-1} f_0$$

$r = \frac{x - x_0}{h}$ ve $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = ...$ 'dir.

Örn: Aşağıda verilen x_i , f_i değerlerini kullanarak Gregory-Newton ileri insterpolasyon yöntemiyle herhangi bir x aradeğeri için F(x) fonksiyonunu ve bu fonksiyondan yararlanarak F(0.5) değerini bulunuz.

i	x_i	f_i	Δf_i*	$\Delta^2 f_i$**
0	0	1		
			$\Delta f_0 = 1$	
1	1	2		$\Delta^2 f_0 = 1$
			$\Delta f_1 = 2$	
2	2	4		

* $\Delta f_0 = f_1 - f_0 = 2 - 1 = 1$ $\Delta f_1 = f_2 - f_1 = 4 - 2 = 2$
** $\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = 2 - 1 = 1$

$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1 - 0 = 1$ $r = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0}{1} = x$

bulunur.

$$F(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 = 1 + x.1 + \frac{x(x-1)}{2!}1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

$$F(0.5) = \frac{1}{2}0.5^2 + \frac{1}{2}0.5 + 1 = 1.375$$

2. Gregory-Newton Geri İnterpolasyon Yöntemi

$$F(x) = f_n - r\forall f_n + \frac{r(r-1)}{2!}\forall^2 f_n - \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\forall^3 f_n + ... + (-1)^n (r,n)\forall^n f_n$$

Burada (r,n); r'nin n'li kombinasyonlarının sayısını, $\triangle^n f_0$ ise ileri sonlu farkları göstermektedir.

$$\begin{aligned}
&\forall f_n = f_n - f_{n-1} \\
&\forall^2 f_n = \forall f_n - \forall f_{n-1} \\
&\forall^3 f_n = \forall^2 f_n - \forall^2 f_{n-1} \\
&... \\
&\forall^n f_n = \forall^{n-1} f_n - \forall^{n-1} f_{n-1}
\end{aligned}$$

$r = \dfrac{x_n - x}{h}$ ve $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = ...$ 'dir.

Örn: Aşağıda verilen x_i , f_i değerlerini kullanarak Gregory-Newton geri insterpolasyon yöntemiyle herhangi bir x aradeğeri için F(x) fonksiyonunu ve bu fonksiyondan yararlanarak F(0.5) değerini bulunuz.

i	x_i	f_i	∇f_i^{*}	$\nabla^2 f_i^{**}$
0	0	1		
			$\nabla f_1 = 1$	
1	1	2		$\nabla^2 f_2 = 1$
			$\nabla f_2 = 2$	
2	2	4		

* $\forall f_1 = f_1 - f_0 = 2 - 1 = 1$ $\quad \forall f_2 = f_2 - f_1 = 4 - 2 = 2$

** $\forall^2 f_2 = \forall f_2 - \forall f_1 = 2 - 1 = 1$

$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1 - 0 = 1 \qquad r = \dfrac{x_2 - x}{h} = \dfrac{2 - x}{1} = 2 - x$

bulunur.

$$F(x) = f_2 - r\forall f_2 + \frac{r(r-1)}{2!}\forall^2 f_2 = 4 - (2 - x).2 + \frac{(2-x)(2-x-1)}{2!}1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

$$F(0.5) = \frac{1}{2}0.5^2 + \frac{1}{2}0.5 + 1 = 1.375$$

3. Newton Kesirli Farklar İnterpolasyon Yöntemi

Aralarında eşit uzaklık bulunmayan noktalar için sonlu farklar yerine kesirli farklar kullanılarak uygulanan interpolasyon yöntemidir. Aşağıdaki formüller kullanılır.

Birinci derceden kesirli fark: $f(x_i, x_{i+1}) = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$

İkinci dereceden kesirli fark: $f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \dfrac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$

Üçüncü derceden kesirli fark:

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}) - f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})}{x_{i+3} - x_i}$$

...
olmak üzere;

$$F(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \ldots$$

Örn: Aşağıda verilen (x_i,f_i) ikililerini kullanarak, Newton kesirli farklar interpolasyon yöntemi ile F(2) değerini bulunuz.

i	x_i	f_i	$f(x_i,x_{i+1})$*	$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2})$**	$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3})$***
0	-1.0	3.000			
			-5.000		
1	0.0	-2.000		5.500	
			3.250		-1.000
2	0.5	-0.375		3.500	
			6.750		-1.000
3	1.0	3.000		1.750	
			8.750		-1.000
4	2.5	16.125		-1.500	
			5.750		
5	3.0	19.000			

$$* \quad f(x_0, x_1) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{-2.000 - 3.000}{0.0 - (-1.0)} = -5.000$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{-0.375 - (-2.000)}{0.5 - 0.0} = 3.250$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = \frac{3.000 - (-0.375)}{1.0 - 0.5} = 6.750$$

$$f(x_3, x_4) = \frac{f_4 - f_3}{x_4 - x_3} = \frac{16.125 - 3.000}{2.5 - 1.0} = 8.750$$

$$f(x_4, x_5) = \frac{f_5 - f_4}{x_5 - x_4} = \frac{19.000 - 16.125}{3.0 - 2.5} = 3.750$$

$$** \; f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}=\frac{3.250-(-5.000)}{0.5-(-1.0)}=5.500$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}=\frac{6.750-3.250}{1.0-0.0}=3.500$$

$$f(x_2,x_3,x_4)=\frac{f(x_3,x_4)-f(x_2,x_3)}{x_4-x_2}=\frac{8.750-6.750}{2.5-0.5}=1.000$$

$$f(x_3,x_4,x_5)=\frac{f(x_4,x_5)-f(x_3,x_4)}{x_5-x_3}=\frac{5.750-8.750}{3.0-1.0}=-1.500$$

$$*** \; f(x_0,x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)-f(x_0,x_1,x_2)}{x_3-x_0}=\frac{3.500-5.500}{1.000-(-1.000)}=-1.000$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{f(x_2,x_3,x_4)-f(x_1,x_2,x_3)}{x_4-x_1}=\frac{1.000-3.500}{2.500-0.000}=-1.000$$

$$f(x_2,x_3,x_4,x_5)=\frac{f(x_3,x_4,x_5)-f(x_2,x_3,x_4)}{x_5-x_2}=\frac{-1.500-1.000}{3.000-0.500}=-1.000$$

Daha üst dereceden tüm kesirli farklar “0” olacaktır. (Formülde yerlerine koyarak denetleyiniz!)

f(1.0) = 3.000 < f(2) = ? < f(2.5) = 16.125 olduğundan indeksleri tekrar belirlerken interpolasyonun yapılacağı nokta (x=2) hangi tarafa yakınsa kaydırma o tarafa doğru yapılır. Verilen sorunun özelinde interpolasyon yapılacak nokta 3. ve 4. noktaların arasında olduğu için 1. nokta 0. nokta olarak kabul edilerek ($x_0 = x_1$) diğer noktaların indeksleri uygun şekilde değiştirilir ($x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $x_3 = x_4$, $x_4 = x_5$). Kesirli farklar da buna uygun olarak kaydırılır. ($f(x_0,x_1) = f(x_1,x_2)$, $f(x_0,x_1,x_2) = f(x_1,x_2,x_3)$, $f(x_0,x_1,x_2,x_3) = f(x_1,x_2,x_3,x_4)$).

Bu durumda,

$$F(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2)+$$
$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2f)(x_0,x_1,x_2,x_3)$$

$$F(x)=-2.000+(2.0-0.0)(3.250)+(2.0-0.0)(2.0-0.5)3.500+$$
$$(2.0-0.0)(2.0-0.5)(2.0-1.0)(-1.000)=14.000$$

4. Merkezi Fark İnterpolasyon Yöntemleri

$x_i < x < x_{i+1}$ olmak üzere x değeri x_i ya da x_{i+1} 'den hangisine daha yakınsa o nokta x_0 noktası olarak alınır ve diğer noktalar bu noktaya göre x_{-p}, x_{-p+1}, x_{-p}, x_{-p+2}, ... , x_{-1}, x_0, x_1, x_{-2}, ... , x_{-n-p} olacak şekilde sıralanır. Burada x_0'ın her iki tarafında da aynı sayıda nokta olacağından 0 – (-p) = n – p => p = n/2 'dir. Daha sonra s = (x - x_0) / h parametresinin değerine göre Sterling ya da Bessel formüllerinden uygun olanı takip edilir.

4.1. Sterling Formülü

$s = \dfrac{x - x_0}{h}$ ve $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = ...$ olmak üzere

$0 < s < 1/4$ veya $3/4 < s < 1$ ise

$$F(x) = f_0 + s\mu\delta f_0 + \frac{s^2}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{s(s^2-1^2)}{3!}\mu\delta^3 f_0 + \frac{s^2(s^2-1^2)}{4!}\delta^4 f_0 + ... +$$
$$\frac{s(s^2-1^2)(s^2-2^2)...(s^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!}\mu\delta^{2k-1} f_0 + \frac{s^2(s^2-1^2)(s^2-2^2)...(s^2-k^2)}{(2k)!}\delta^{2k} f_0$$

Burada,

$\delta f_i = f(x_{i+1/2}) - f(x_{i-1/2})$ birinci dereceden merkezi fark,

$\delta^r f_i = \delta^{r-1} f(x_{i+1/2}) - \delta^{r-1} f(x_{i-1/2})$ r. dereceden merkezi fark,

$\mu\delta^r f_i = \dfrac{1}{2}(\delta^r f(x_{i+1/2}) + \delta^r f(x_{i-1/2}))$ ortalama operatörünü göstermektedir.

4.2. Bessel Formülü

$1/4 \le s \le 3/4$ ise

$$F(x) = \mu f_{1/2} + (s - 1/2)\delta f_{1/2} + \frac{s(s-1)}{2!}\mu\delta^2 f_{1/2} + \frac{s(s-1)(s-1/2)}{3!}\delta^3 f_{1/2} + ... +$$
$$\frac{s(s-1)(s+1)(s-2)...(s+(k-1))(s-1/2)}{(2k-1)!}\delta^{2k-1} f_{1/2} +$$
$$\frac{s(s-1)(s+1)(s-2)...(s+k)}{(2k)!}\mu\delta^{2k} f_{1/2}$$

'dır ve aynı merkezi fark formülleri geçerlidir.

Örn: Aşağıda verilen (x_i,f_i) ikililerini kullanarak, uygun merkezi fark interpolasyon yöntemi ile F(2.2) değerini bulunuz.

i	x_i	f_i	δf_i*	$\delta^2 f_i$**	$\Delta^3 f_i$***	$\Delta^4 f_i$****
0	1	1				
			4			
1	2	5		1		
			5		1	
2	3	10		2		-1
			7		0	
3	4	17		2		
			9			
4	5	26				

$* \delta f_{1/2} = f(x_1) - f(x_0) = 5 - 1 = 4 \qquad \delta f_{3/2} = f(x_2) - f(x_1) = 10 - 5 = 5$

$\delta f_{5/2} = f(x_3) - f(x_2) = 17 - 10 = 7 \qquad \delta f_{7/2} = f(x_4) - f(x_3) = 26 - 17 = 9$

$** \ \delta^2 f_1 = \delta f_{3/2} - \delta f_{1/2} = 5 - 4 = 1 \qquad \delta^2 f_2 = \delta f_{5/2} - \delta f_{3/2} = 7 - 5 = 2$

$\delta^2 f_3 = \delta f_{7/2} - \delta f_{5/2} = 9 - 7 = 2$

$*** \ \delta^3 f_{1/2} = \delta^2 f_2 - \delta^2 f_1 = 2 - 1 = 1 \qquad \delta^3 f_{3/2} = \delta^2 f_3 - \delta^2 f_2 = 2 - 2 = 0$

$**** \ \delta^4 f_1 = \delta^3 f_{3/2} - \delta^3 f_{1/2} = 0 - 1 = -1$

$x_1 = 2 < x = 2.2 < x_2 = 3$ olduğu ve $x = 2.2$, $x_1 = 2$'ye daha yakın olduğundan $x_0 = x_1$ alınır. Bu durumda yeni indeksler; $x_{-1} = x_0$, $x_0 = x_1$, $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $x_3 = x_4$ şeklinde oluşmuş olur. Merkezi fark ifadelerinin indeksleri aynı şekilde kaydırılır ($\delta^r f_{-1} = \delta^r f_0$, $\delta^r f_{-1/2} = \delta^r f_{1/2}$, $\delta^r f_0 = \delta^r f_1$, $\delta^r f_{1/2} = \delta^r f_{3/2}$, ...).

$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = 1$ 'dir

$s = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{2.2 - 2.0}{1} = 0.2$, dolayısı ile $0 < s = 0.2 < 1/4$ olduğu için Sterling formülü kullanılır.

$$F(x) = f_0 + s\mu\delta f_0 + \frac{s^2}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{s(s^2 - 1^2)}{3!}\mu\delta^3 f_0 + \frac{s^2(s^2 - 1^2)}{4!}\delta^4 f_0$$

Bu noktada öncelikle ortalama operatörü ile verilen terimleri hesaplamamız gereklidir.

$$\mu\delta f_0 = \frac{1}{2}(\delta f_{1/2} + \delta f_{-1/2}) = \frac{1}{2}(5 + 4) = 9/2$$

$$\mu\delta^3 f_0 = \frac{1}{2}(\delta^3 f_{1/2} + \delta^3 f_{-1/2}) = \frac{1}{2}(1+0) = \tfrac{1}{2}$$

$$F(2.2) = 5 + 0.2\frac{9}{2} + \frac{0.2^2}{2!}1 + \frac{0.2(0.2^2 - 1^2)}{3!}\frac{1}{2} + \frac{0.2^2(0.2^2 - 1^2)}{4!}(-1) = 5.9056 \text{ bulunur.}$$

Aynı problemi x = 2.5 için çözelim.

$x_1 = 2 < x = 2.5 < x_2 = 3$ olduğu ve x = 2.5, hem x_1 = 2'ye hem x_1 = 3'e aynı uzaklıkta olduğundan $x_0 = x_1$ alınabilir ($x_0 = x_2$ de alınabilir, denetleyiniz!). Bu durumda yeni indeksler; $x_{-1} = x_0$, $x_0 = x_1$, $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $x_3 = x_4$ şeklinde oluşmuş olur. Merkezi fark ifadelerinin indeksleri aynı şekilde kaydırılır ($\delta^r f_{-1} = \delta^r f_0$, $\delta^r f_{-1/2} = \delta^r f_{1/2}$, $\delta^r f_0 = \delta^r f_1$, $\delta^r f_{1/2} = \delta^r f_{3/2}$, ...).

$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{2.5 - 2.0}{1} = 0.5$ dolayısı ile $\tfrac{1}{4} \le s = 0.5 \le \tfrac{3}{4}$ olduğundan buz kez Bessel formülünü kullanmak gereklidir.

$$F(x) = \mu f_{1/2} + (s - 1/2)\delta f_{1/2} + \frac{s(s-1)}{2!}\mu\delta^2 f_{1/2} + \frac{s(s-1)(s-1/2)}{3!}\delta^3 f_{1/2} + \frac{s(s-1)(s+1)(s-2)}{4!}\mu\delta^4 f_{1/2}$$

Bu noktada yine öncelikle ortalama operatörü ile verilen terimleri hesaplamamız gereklidir.

$$\mu f_{1/2} = \frac{1}{2}(f_1 + f_0) = \frac{1}{2}(10+5) = \tfrac{15}{2}$$
$$\mu\delta^2 f_{1/2} = \frac{1}{2}(\delta^2 f_1 + \delta^2 f_0) = \frac{1}{2}(2+2) = 2$$
$$\mu\delta^4 f_{1/2} = 0$$

$$F(2.5) = \frac{15}{2} + (0.5 - 1/2)5 + \frac{0.5(0.5-1)}{2!}2 + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-1/2)}{3!}0 + \frac{0.5(0.5-1)(0.5+1)(0.5-2)}{4!}0 = 7.250$$ bulunur.

5. Lagrange İnterpolasyonu

İnterpolasyonda en sık kullanılan yöntemlerden biri olan Lagrange interpolasyon yöntemi aşağıdaki formüllerle ifade edilir.

$$F(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)}f(x_1)+$$
$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)...(x_2-x_n)}f(x_2)+...+\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_2)...(x_n-x_{n-1})}f(x_n)+R_n$$

Örn: Aşağıda verilen (x_i,f_i) ikililerini kullanarak, Lagrange interpolasyon yöntemi ile F(2.2) değerini bulunuz.

i	x_i	f_i
0	1	1
1	2	5
2	3	10
3	4	17
4	5	26

$$F(2.2)=\frac{(2.2-2)(2.2-3)(2.2-4)(2.2-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}1+\frac{(2.2-1)(2.2-3)(2.2-4)(2.2-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}5+$$
$$\frac{(2.2-1)(2.2-2)(2.2-4)(2.2-5)}{(3-1)(3-2)(1-4)(1-5)}10+\frac{(2.2-1)(2.2-2)(2.2-3)(2.2-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}17+$$
$$\frac{(2.2-1)(2.2-2)(2.2-3)(2.2-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}26=5.9408$$

6. Hermite Polinomları

f(x)'in yanı sıra f(x)'in birinci türevi f'(x) hakkında bir bilgi varsa

$P2n-1(x)=\sum_{i=0}^{n} A_i(x) f_i + \sum_{i=0}^{n} B_i(x) f_i'$ şeklinde tanımlanan polinomlara Hermite polinomları denir. Bu polinomlar kullanılarak herhangi bir x için aradeğer hesabı yapmak mümkündür. Burada;

$$A_i(x)=\left[1-2(x-x_i)L_i'(x)\right]\left[L_i(x)\right]^2$$

$B_i(x)=(x-x_i)\left[L_i(x)\right]^2$ olup, $L_i(x)$, bir önceki bölümde gördüğümüz Langrange katsayılarıdır.

Örn: Aşağıdaki tabloda verilen bilgileri kullanarak x = 2 için aradeğer hesabı yapınız.

i	x_i	f_i	f'_i
0	0	0	0
1	4	2	0

Öncelikle Lagrange katsayılarını hesaplayalım.

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{x-4}{0-4}=-\frac{1}{4}x+1 \quad \text{ve} \quad L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{x-0}{4-0}=\frac{1}{4}x$$

$$L_0'(x)=-\frac{1}{4} \quad \text{ve} \quad L_1'(x)=\frac{1}{4} \quad \text{elde edilir.}$$

Şimdi poinomun katsayılarını hesaplayalım.

$$A_0(x)=\left[1-2(x-x_0)L_0'(x)\right]\left[L_0(x)\right]^2 \text{ yani } A_0(x)=\left[1-2(x-0)(-\frac{1}{4})\right](-\frac{1}{4}x+1)^2$$

$$A_1(x)=\left[1-2(x-x_1)L_1'(x)\right]\left[L_1(x)\right]^2 \text{ yani } A_1(x)=\left[1-2(x-4)(\frac{1}{4})\right](\frac{1}{4}x)^2 \quad \text{elde edilir.}$$

$$B_0(x)=(x-x_0)\left[L_0(x)\right]^2 \quad \text{yani} \quad B_0(x)=(x-0)(-\frac{1}{4}x+1)^2$$

$$B_1(x)=(x-x_1)\left[L_1(x)\right]^2 \quad \text{yani} \quad B_1(x)=(x-4)(\frac{1}{4}x)^2 \quad \text{elde edilir.}$$

Hermite polinomunu oluşturacak olursak;

$P(x)=A_0(x)f_0+A_1(x)f_1+B_0(x)f_0'+B_1(x)f_1'$; f_0, f'_0, f'_1 = 0 olduğundan

$$P(x)=A_1(x)f_1=(-\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{16}x^2)2=(\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3)\,;\; P(2)=\frac{3}{8}2^2-\frac{1}{16}2^3=1$$

6. Aitken Yöntemi

Bu yöntem ile (n+1) ayrık noktaya bir dizi doğrusal interpolasyon yöntemi uygulanarak sonunda n veya daha düşük dereceden bir polinom elde edilir. Elde edilen bu polinom tüm aradeğerleri (x) bulmak için kullanılır.

j	x_j	f_j	İnterpolasyon terimi			
0	x_0	f_0				
1	x_1	f_1	$I_{0,1}$			
2	x_2	f_2	$I_{0,2}$	$I_{0,1,2}$		
3	x_3	f_3	$I_{0,3}$	$I_{0,1,3}$	$I_{0,1,2,3}$	
4	x_4	f_4	$I_{0,4}$	$I_{0,1,4}$	$I_{0,1,2,4}$	$I_{0,1,2,3,4.}$

Bu tablo daha çok sayıda nokta için aynı şekilde genişletilebilir. Burada;

j = 1,2,3,4,... için

$$I_{0,j} = (\frac{x_j - x}{x_j - x_0}) f_0 + (\frac{x - x_0}{x_j - x_0}) f_j$$

j = 2,3,4,... için

$$I_{0,1,j} = (\frac{x_j - x}{x_j - x_1}) I_{0,1} + (\frac{x - x_1}{x_j - x_1}) I_{0,j}$$

j = 3,4,... için

$$I_{0,1,2,j} = (\frac{x_j - x}{x_j - x_2}) I_{0,1,2} + (\frac{x - x_2}{x_j - x_2}) I_{0,1,j}$$

j = 4, ... için

$$I_{0,1,2,3,j} = (\frac{x_j - x}{x_j - x_3}) I_{0,1,2,3} + (\frac{x - x_3}{x_j - x_3}) I_{0,1,2,j}$$

Örn: Aşağıda verilen (x_i,f_i) ikililerini kullanarak, Aitken interpolasyon yöntemi ile herhangi bir x için aradeğer elde edebileceğiniz F(x) fonksiyonunu bulunuz. Bu fonksiyonu F(0.5) ve F(1.5) değerlerini elde etmek için kullanınız.

j	x_j	f_j	İnterpolasyon terimi	
0	0	1		
1	1	2	$I_{0,1}$	
2	2	4	$I_{0,2}$	$I_{0,1,2}$ = F(x)

$$I_{0,1} = (\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0})f_0 + (\frac{x - x_0}{x_1 - x_0})f_1 = (\frac{1-x}{1-0})1 + (\frac{x-0}{1-0})2 = 1 + x$$

$$I_{0,2} = (\frac{x_2 - x}{x_2 - x_0})f_0 + (\frac{x - x_2}{x_2 - x_0})f_1 = (\frac{2-x}{2-0})1 + (\frac{x-0}{2-0})4 = 1 + \frac{3}{2}x$$

$$I_{0,1,2} = (\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1})I_{0,1} + (\frac{x - x_1}{x_2 - x_1})I_{0,2} = (\frac{2-x}{2-1})(1+x) + (\frac{x-1}{2-1})(1+\frac{3}{2}x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

Bu durumda

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

$$F(0.5) = \frac{1}{2}0.5^2 + \frac{1}{2}0.5 + 1 = 1.375 \quad \text{ve} \quad F(1.5) = \frac{1}{2}1.5^2 + \frac{1}{2}1.5 + 1 = 2.875$$

bulunur.

Örn: Verilen bir f(x) = sin x fonksiyonu için aşağıdaki (x_i,f_i) ikililerini kullanarak, Aitken interpolasyon yöntemi ile sinx = 0.2800 aradeğerini veren x değerini ve bu değerin bağıl hatasını noktadan sonra 6 basamak kullanarak hesaplayınız.

j	x_j (rad.)	f_j
0	0.1	0.0989
1	0.2	0.1987
2	0.3	0.2955
3	0.4	0.3894

sin x = 0.2800 ‘i bulmak için değişkenlerin yerini değiştirip ($x_j \leftrightarrow f_j$) Aitken interpolasyonu uygulamalıyız. Zira bize x = 0.28 için sin 0.28 değeri değil sin x = 0.28’i veren x değeri sorulmaktadır! Bu duruma uygun olarak tablomuzu yeniden düzenlersek;

j	x_j	f_j	İnterpolasyon Terimi		
0	0.0989	0.1			
1	0.1987	0.2	$I_{0,1}$		
2	0.2955	0.3	$I_{0,2}$	$I_{0,1,2}$	
3	0.3894	0.4	$I_{0,3}$	$I_{0,1,3}$	$I_{0,1,2,3}$ = F(x)

İnterpolasyon terimlerini hesaplayalım.

$$I_{0,1} = (\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0})f_0 + (\frac{x - x_0}{x_1 - x_0})f_1 = (\frac{0.1987 - 0.2800}{0.1987 - 0.0999})0.1 + (\frac{0.2800 - 0.0999}{0.1987 - 0.0999})0.2 = 0.2822$$

$$I_{0,2} = (\frac{x_2 - x}{x_2 - x_0})f_0 + (\frac{x - x_0}{x_2 - x_0})f_1 = (\frac{0.2955 - 0.2800}{0.2955 - 0.0999})0.1 + (\frac{0.2800 - 0.0999}{0.2955 - 0.0999})0.3 = 0.2842$$

$$I_{0,3}=(\frac{x_3-x}{x_3-x_0})f_0+(\frac{x-x_0}{x_3-x_0})f_1=(\frac{0.3894-0.2800}{0.3894-0.0999})0.1+(\frac{0.2800-0.0999}{0.3894-0.0999})0.4=0.2867$$

$$I_{0,1,2}=(\frac{x_2-x}{x_2-x_1})I_{0,1}+(\frac{x-x_1}{x_2-x_1})I_{0,2}=(\frac{0.2955-0.2800}{0.2955-0.1987})0.2822+(\frac{0.2800-0.1987}{0.2955-0.1987})0.2842=0.2838$$

$$I_{0,1,3}=(\frac{x_3-x}{x_3-x_1})I_{0,1}+(\frac{x-x_1}{x_3-x_1})I_{0,3}=(\frac{0.3894-0.2800}{0.3894-0.1987})0.2822+(\frac{0.2800-0.1987}{0.3894-0.1987})0.2867=0.2841$$

$$I_{0,1,2,3}=(\frac{x_3-x}{x_3-x_2})I_{0,1,2}+(\frac{x-x_2}{x_3-x_2})I_{0,1,3}=(\frac{0.3894-0.2800}{0.3894-0.2955})0.2842+(\frac{0.2800-0.2955}{0.3894-0.2955})0.2867=0.2838$$

F(0.2800) = 0.2800 bulunmuş olur.

Gerçekte sin x = 0.28 veren x değerini bulmak için $\sin^{-1}(0.28)$ = arcsin(0.28) değerini hesaplamalıyız. Bu değer noktadan sonra altı basamak dahilinde $\sin^{-1}(0.28)$ = 0.283794'dür.

$$\varepsilon_a=\frac{|x_t-x|}{x_t}=\frac{|0.283794-0.2838|}{0.283794}=0.000021=\%0.0021$$

Hatanın bu kadar küçük omasının iki sebebi vardır. Birincisi, işlem yapılan aralığın çok küçük olması (0.1-0.4 radyan), ikincisi ise bu aralıkta sin(x) ve $\sin^{-1}(x)$ fonksiyonlarının doğrusala çok yakın davranmasıdır. Temel olarak bir dizi doğrusal interpolasyona dayanan Aitken yöntemi bu nedenle az sayıda (örneğimizde dört) nokta için dahi gerçeğine çok yakın bir değer vermiştir.