KÜRESEL TRİGONOMETRİ

Düzlemden küreye geçtiğimize göre, küre üzerindeki bir noktanın yerini belirten geometrik kon düzeneklerini tanımlamak gerekir. Genelde iki tür kon düzeneği kullanılır :

1- Dik kon düzeneği **(x, y, z)**

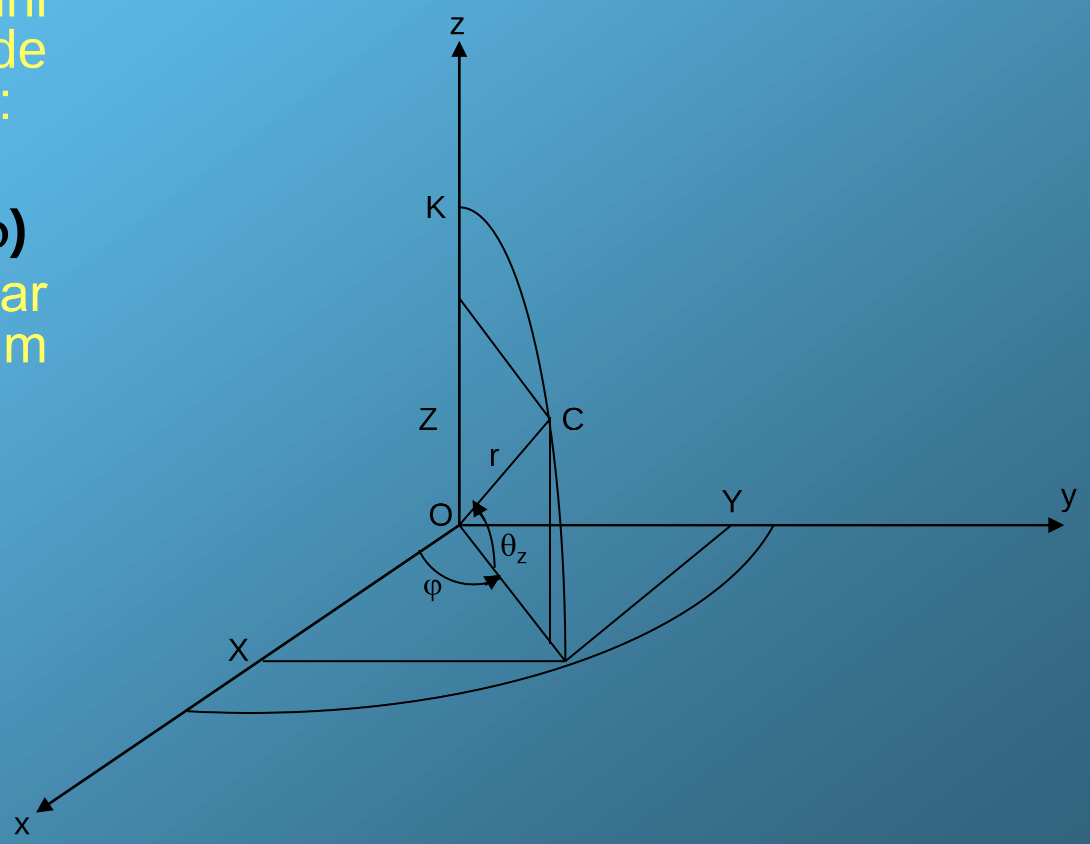
2- Kutupsal kon düzeneği **(r, θ, φ)**

Bu iki düzenekteki konsayılar arasında olan dönüşüm formülleri,

$x = r \cos \theta \cos \varphi$

$y = r \cos \theta \sin \varphi$

$z = r \sin \theta$



Kon düzeneği oluşturulurken yön önemlidir. Başlangıç noktasında duran bir gözlemcinin başının bulunduğu yönde Oz-ekseni alınırsa, diğer eksenler Ox ve Oy rasgele seçilebilirler. Şöyle ki, eğer Ox-yönünden Oy-yönüne doğru bir dönüş yapılırsa (+) yön [saatin dönmesinin tersi] ve bu düzenek "artı yönlü" kabul edilir. Karşıt durum için ise "eksi yönlü" kabul edilir. Genellikle "artı yönlü" düzenek dikkate alınır.

Artı yönlü düzeneği dikkate alarak, kutupsal düzenekte θ açısı kuzeye doğru 0^o ile $+90^o$ ve güneye doğru 0^o ile -90^o arasında ve φ açısı da (+) yönde 0^o ile 360^o arasında ölçülür. Gök küresi söz konusu ise, küre yarıçapı $r=1$ birim alınır. Bu durumda bir C noktasının yeri (θ, φ) gibi iki açıyla anlamlı olarak belirtilebilir.

Burada xOy nin belirttiği düzleme TEMEL DÜZLEM, onun küre ile arakesitine de TEMEL ÇEMBER denir.

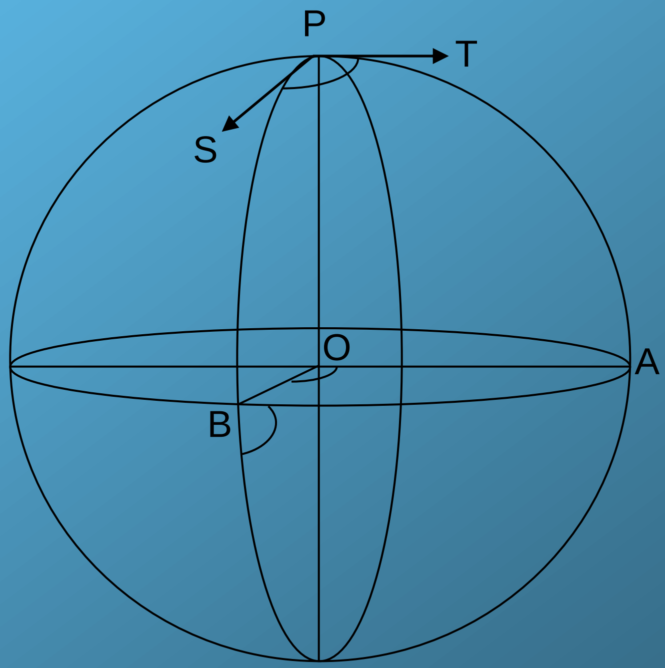
Artı düzenekte Oz- nin kuzeyi deldiği nokta "artı kutup", Gökbilimde ise "Kuzey kutup", diğeri ise "eksi kutup" ya da "Güney kutup" olur.

BÜYÜK DAİRE :Kürenin merkezinden geçen düzlem ile kürenin arakesitidir.

KÜÇÜK DAİRE :Küreyi herhangi bir yerinden kesen düzlemle kürenin arakesitidir.

KUTUP(UÇLAK) NOKTALARI :Herhangi bir büyük daire düzleminin merkezinden geçen dik doğrultunun küreyi kestiği noktalardır.

KÜRESEL AÇI : İki büyük çember birbirlerini keserlerse, kesim noktasında bir küresel açı ortaya çıkar. Bu küresel açı, kesişen bu iki çemberin düzlemlerinin arasındaki İKİ DÜZLEMLİ açıdır.



$$PS \perp OP \quad , S\hat{P}T = B\hat{O}A$$

KÜRESEL ÜÇGEN

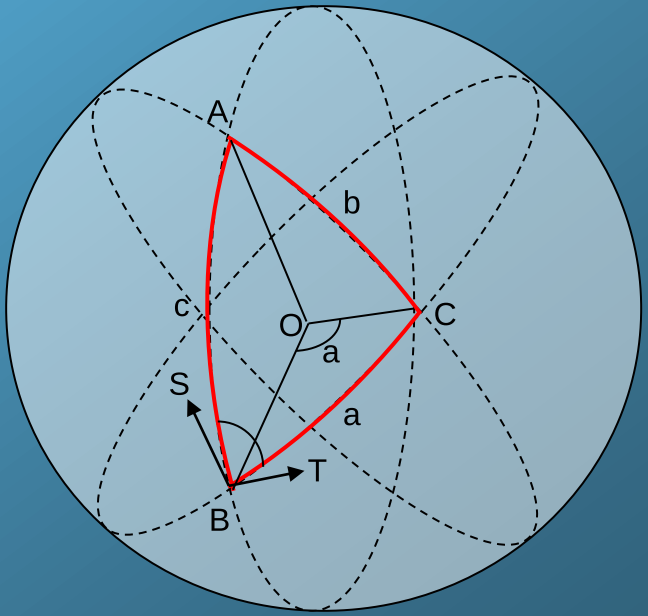
TANIM : Küre üzerinde herhangi üç nokta, ve bu noktaları üzerinde bulundukları yarı küre üzerinde BÜYÜK ÇEMBER’ler düzlemleri ile birleştirildiğinde elde edilen geometrik şekle Basit Küresel Üçgen denir.

$\hat{B}$ *acisi* (OBC) *ile* (OBA) *duzlemleri* *ara*sin*daki olcek acidir* (*iki duzlemli acı*):

$$\hat{B} = S\hat{B}T$$

Kenarlar da aci ile olculur. $B\hat{O}C = a$, $A\hat{O}C = b$,

$A\hat{O}B = c$.



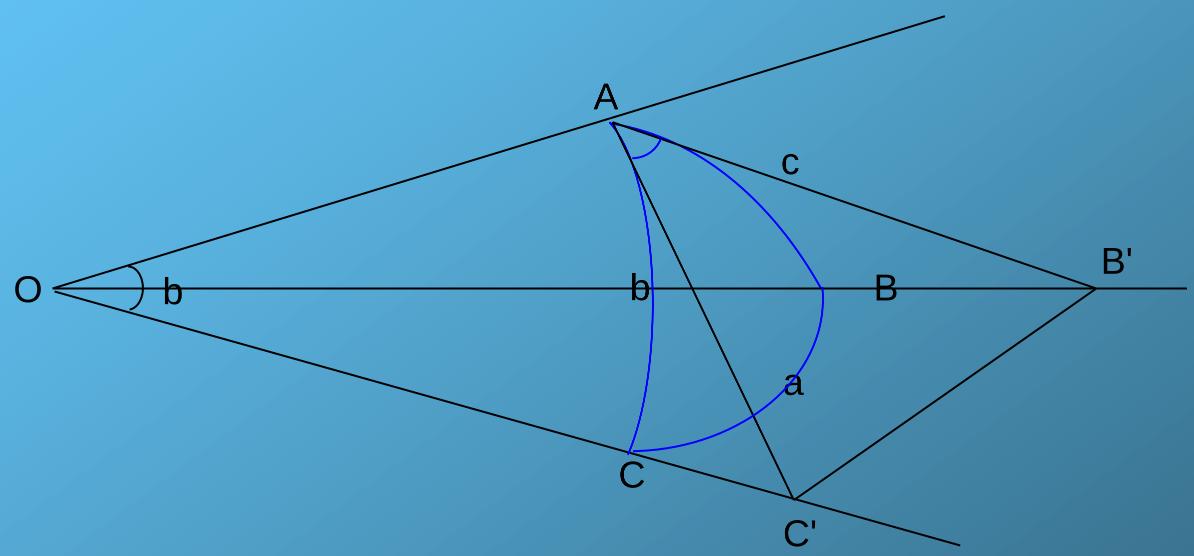
Küresel üçgenin her iç açısı 180^{o} den küçüktür. Bu da basit küresel üçgen olma sonucudur. Diğerlerinden kiminin iki kenarı 180^{o} den küçük bir kenarı 180^{o} den büyüktür.

TEOREM : Bir küresel üçgenin iç açılarının toplamı 180^{o} den büyük 540^{o} den küçüktür. Yani bir ABC küresel üçgeninde

$$180^{0} < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540^{0} \qquad dir.$$

İspat :

ABC küresel üçgenin iç açılarıyla AB’C’ düzlem üçgeninin iç açılarını karşılaştıralım.



B açısı iki düzlemli açıdır. Yani iki düzlem arasındaki en büyük açıdır. Çünkü bu açı a ve c yaylarına çizilen iki teğet arasındaki açıyla belirlenmiştir. Oysa B’ açısının kenarları OB arakesitine göre eğiktir. Onun için B’ açısı B ölçek açısından küçüktür. Gerçekten B’ noktasını sonsuza doğru götürecek olursak B’ nün giderek küçülüp sıfıra yaklaştığını görürüz.

Aynı değerlendirme C açısı ile C’ açısı için de yapılabilir. Sonuç olarak,

$$\hat{A} = \hat{A}$$

$$\hat{B} > \hat{B}'$$

$$\hat{C} > \hat{C}'$$

$$+ \qquad +$$

$$------------$$

$$A + B + C > \underbrace{A + B' + C'}_{180^0} \Rightarrow A + B + C > 180^0 \quad bulunur.$$

Dolayisiyle,

$$A < 180^0$$

$$B < 180^0$$

$$C < 180^0$$

$$+ \qquad +$$

$$-------------$$

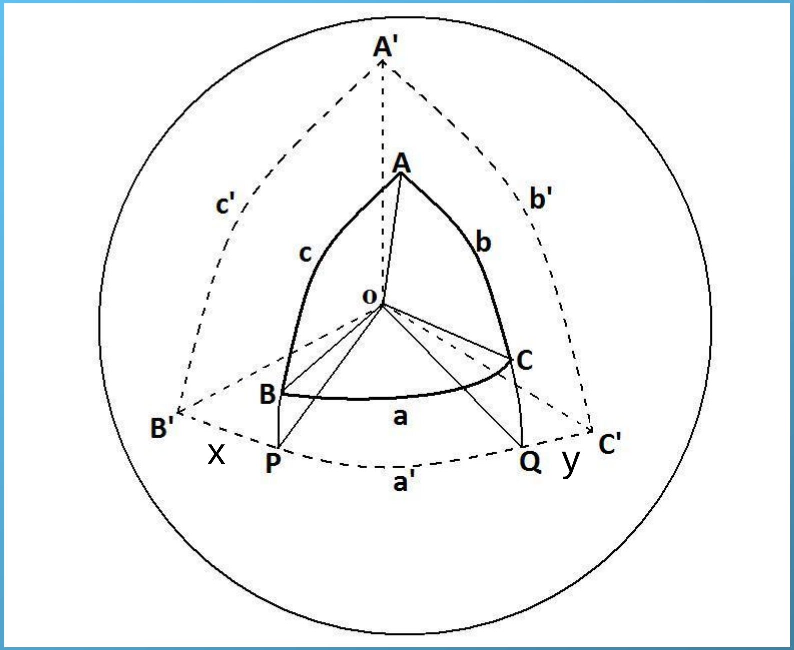
$$A + B + C < 540^0 \quad bulunur. \quad Yani,$$

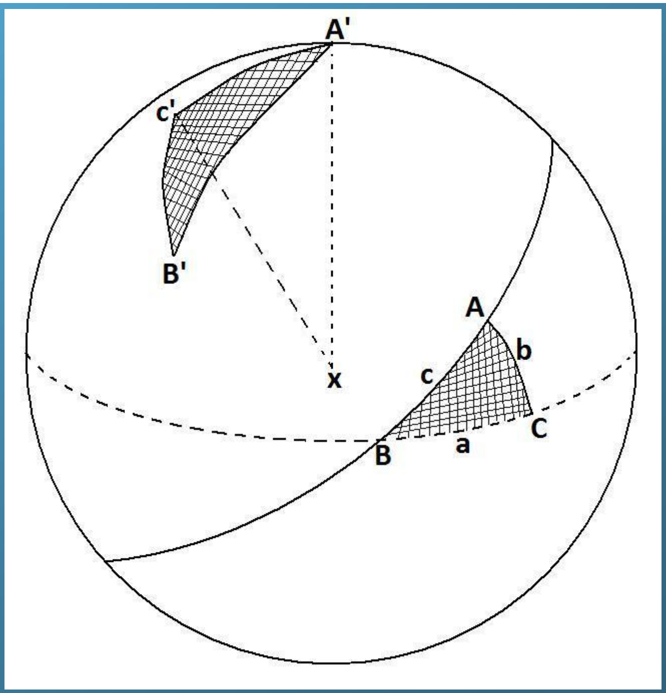
$$180^0 < A + B + C < 540^0 \quad dir.$$

Önemli bir kaç özelliği açıklamada yararlı olan “Kutupsal üçgen” tanımı şöyledir : Üçgenin bir kenarının bulunduğu daireye küre merkezinden çıkılan dikme küreyi iki noktada deler. Bu noktalardan her biri üçgenin bir kenarının “kutup noktası” veya “kutbu” denir. Bu tanıma göre bir küresel üçgenin altı tane kutbu vardır. Bu kutup noktaları üçer üçer birleştirerek bir çok küresel üçgen oluşturmak mümkündür. Fakat bunların içinde bizim dikkate aldığımız üçgenin karşı tarafında üç kutup noktadan oluşan basit küresel üçgen bulunabilir. Buna “Kutupsal üçgen” denir.

ABC bir küresel üçgen ise bu küresel üçgenin A’B’C’ gibi bir kutupsal üçgeni vardır. Burada a nın kutbu denilince A’ noktası akla gelmelidir. Öbür kutup dikkate alınmaz.

Bu üçgenler arasında ilginç özellikler vardır.





C’ noktası AB kenarının kutup noktasıdır.

a nın kutup noktası A’ ise

b nin kutup noktası B’ ise

c nin kutup noktası C’ ise

A’B’C’ üçgenine ABC küresel üçgenin KUTUPSAL ÜÇGENİ denir.

TEOREM : A’B’C’ küresel üçgeni ABC küresel üçgenin kutupsal üçgeni ise, ABC küresel üçgeni de A’B’C’ küresel üçgeninin kutupsal üçgenidir.

Ispat :

$$a \quad kenarinin \quad kutup \quad noktasi \quad A'$$

$$b \quad kenarinin \quad kutup \quad noktasi \quad B'$$

$$c \quad kenarinin \quad kutup \quad noktasi \quad C' \qquad ise,$$

$$a' \quad kenarinin \quad kutup \quad noktasi \quad A$$

$$b' \quad kenarinin \quad kutup \quad noktasi \quad B$$

$$c' \quad kenarinin \quad kutup \quad noktasi \quad C \qquad oldugunu \quad gosterirsek.$$

Şekilden,

OB’ $\perp$ (OAC) düzlemine → OB’ $\perp$ OA

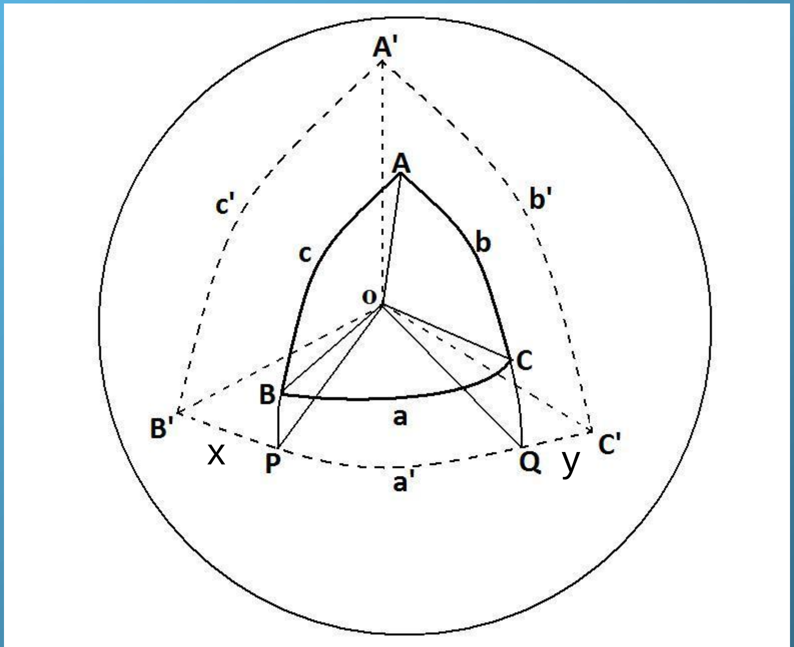
OC’ $\perp$ (OAB) düzlemine → OC’ $\perp$ OA

O halde OA $\perp$ (OB’C’) düzlemine, yani A noktası

B’C’ yayı = a’ kenarının kutbudur. Benzer şekilde B köşesinin de b’ kenarının, C köşesinin de c’ kenarının kutupları olduğunu gösterebiliriz. Örneğin B → b’ için;

OB $\perp$ (OA’C’) → OB $\perp$ OC’

OB $\perp$ (OC’A’) → OB $\perp$ OA’ gibi.



TEOREM : A'B'C' küresel üçgeni ABC üçgeninin kutupsal üçgeni ise, bu iki üçgenin kenarları ve açıları arasında A+a'=180^o, B+b'=180^o, C+c'=180^o ve a+A'=180^o, b+B'=180^o, c+C'=180^o bağıntıları vardır.

İspat : a) Şekilden yararlanarak,

OA ⊥ (OB'C') → OA ⊥ OP aynı zamanda OA ⊥ OQ ,

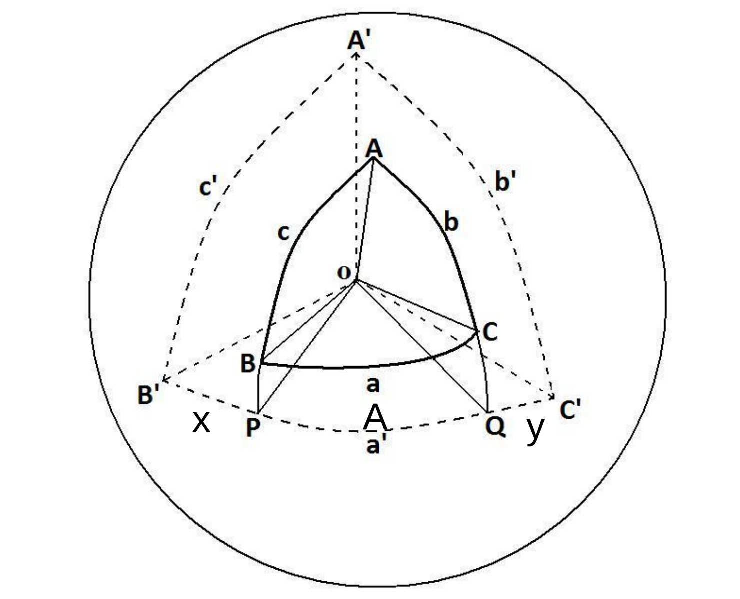
O zaman PÔQ=Â oluyor.

OB' ⊥ (AOC) → OB' ⊥ OQ → B'ÔQ =90^o

B'ÔP = x , B'ÔQ = x+A = 90^o

OC' ⊥ (AOB) → OC' ⊥ OP → C'ÔP=90^o

C'ÔQ = y , C'ÔP = y+A =90^o



$$x+A=90^o$$

$$y+A=90^o$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\underbrace{x+y+A}_{a'=B'\widehat{O}C'}+A=180^o \quad \Rightarrow \qquad a'+A=180^o \qquad bulunur.$$

Benzer yoldan b'+B =180^o ve c'+C = 180^o olduğu gösterilebilir.

b) OL doğrusu (OA’B’) düzleminde,

OM doğrusu (OA’C’) düzlemindedir.

O halde bu iki düzlemin arakesiti OA’ dür. Diğer taraftan,

OL , (OBC) içinde,

OM, (OBC) içindedir.

A′ noktası a kenarının kutbu → OA′ ⊥ (OBC)

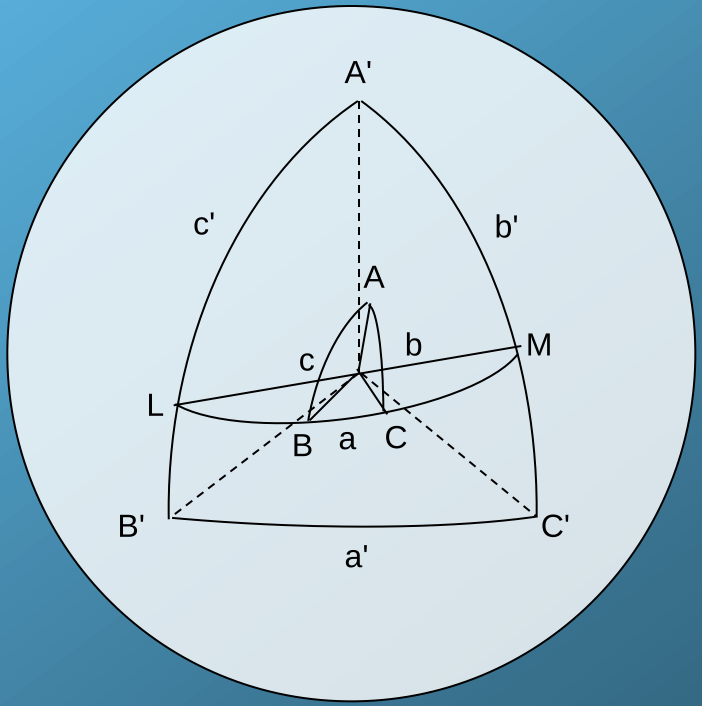
OA’ ⊥ OL

OA’ ⊥ OM

LÔM açısı (A’OB’) ile (A’OC’) düzlemleri arasındaki ölçek açıdır. Yani LÔM = Â′ dır.

B → b′ → OB ⊥ (OA’C’) → OB ⊥ OM , BÔM = 90^o

C → c’ nün kutbu → OC ⊥ (OA’B’) → OC ⊥ OL , CÔL = 90^o



$$B\hat{O}M = B\hat{O}C + C\hat{O}M = 90^o$$

$$C\hat{O}L = C\hat{O}B + B\hat{O}L = 90^o$$

$$+$$

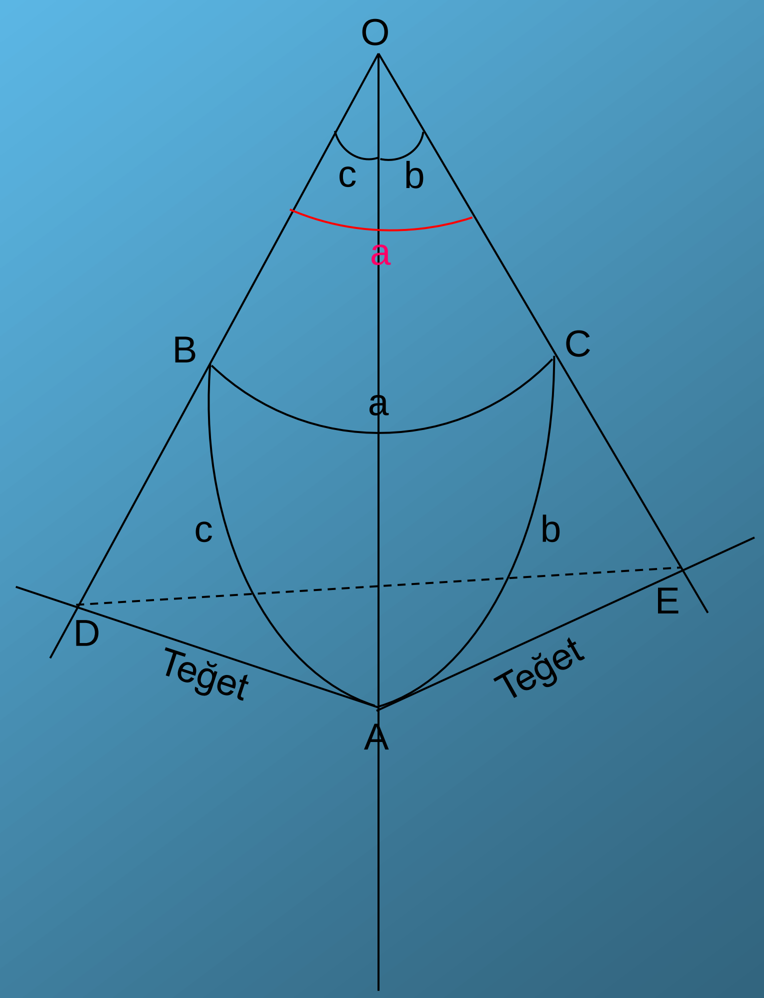
$$-----------------------$$

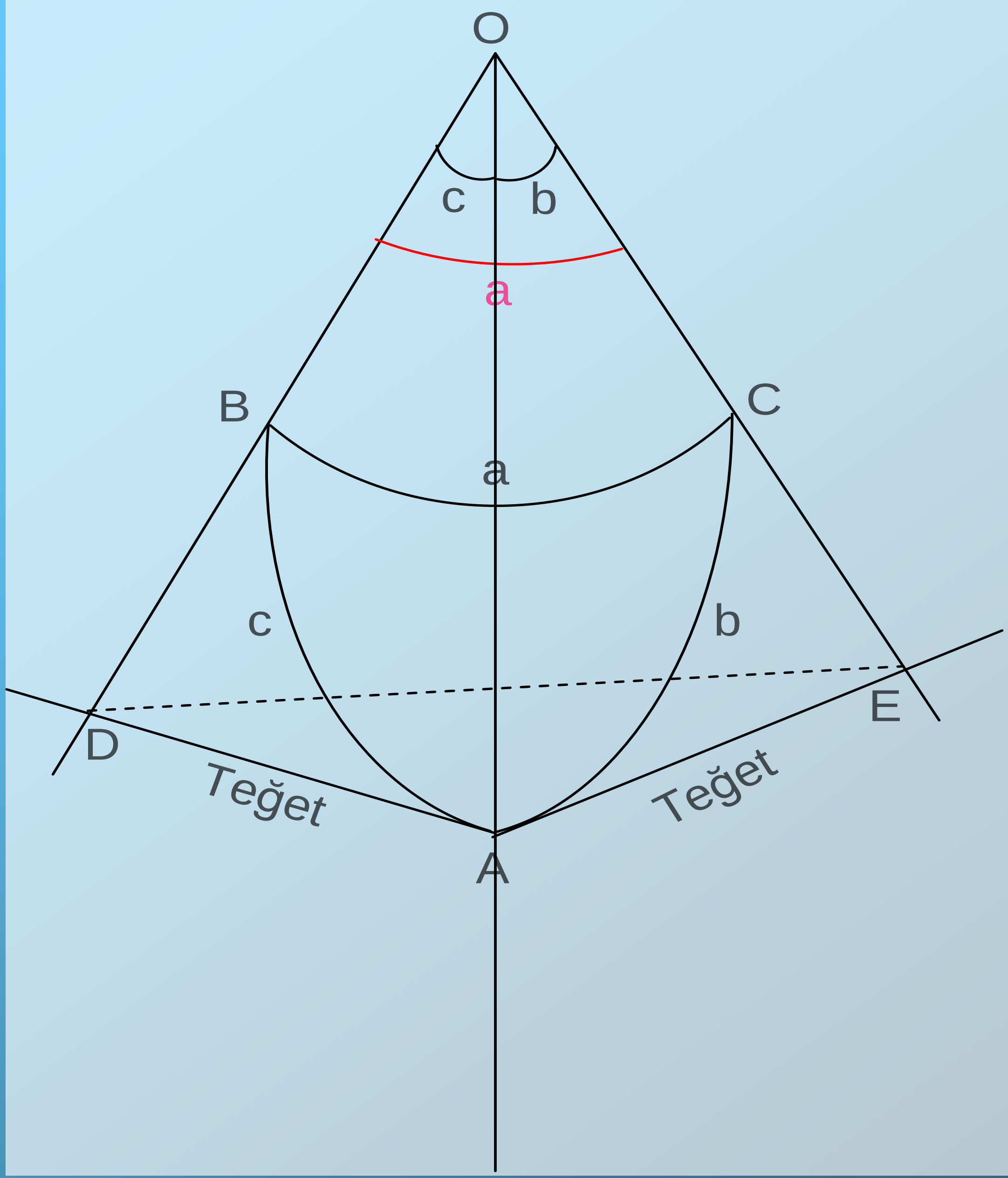
$$\underbrace{B\hat{O}C + C\hat{O}M + B\hat{O}L}_{L\hat{O}M = A'} + \underbrace{C\hat{O}B}_{a} = 180^o \qquad \Rightarrow A' + a = 180^o$$

olduğu görülür. Aynı yoldan B' +b = 180^o ve C' + c = 180^o olduğu gösterilebilir.

Küresel üçgende Temel Formüller

Gökbilim hesapları için küresel üçgenlerin kenarlarıyla açıları arasındaki bağıntıların bilinmesi gerekir. Düzlem trigonometri tanımları ve formüllerinden yararlanarak, doğrudan doğruya küresel üçgenden çıkarılan ilk formüllere temel formüller denir. Daha sonra bu temel formüllerden çıkarılanlara da ikincil formüller denir.




O
c
b
a
B
C
a
c
b
E
D
Teğet
Teğet
A

$$O\overset{\Delta}{A}D \quad ve \quad O\overset{\Delta}{A}E \quad dik \quad ucgenlerinde;$$

$$\tan c = \frac{AD}{OA} \quad \Rightarrow AD = OA \quad \tan c$$

$$\Big\}.......(1)$$

$$\cos c = \frac{OA}{OD} \quad \Rightarrow OD = \frac{OA}{\cos c} = OA\sec c$$

$$\tan b = \frac{AE}{OA} \quad \Rightarrow AE = OA \quad \tan b$$

$$\Big\}......(2)$$

$$\cos b = \frac{OA}{OE} \quad \Rightarrow OE = OA\sec b$$

$$D\overset{\Delta}{A}E \quad duzlem \quad ucgeninde;$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2AD \quad AE\cos A$$

(1) *ve* (2) *den yararlanarak*,

$$\overline{DE}^2 = OA^2\tan^2 c + OA^2\tan^2 b - 2OA^2\tan c\tan b\cos A \quad olur.$$

$$\overline{DE}^2 = OA^2\left(\tan^2 c + \tan^2 b - 2\tan c\tan b\cos A\right) \qquad ...(3)$$

$$D\overset{\Delta}{O}E \quad duzlem \quad ucgeninde;$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2OD \quad OE\cos a$$

(1) *ve* (2) *den yararlanarak*,

$$\overline{DE}^2 = OA^2\sec^2 c + OA^2\sec^2 b - 2OA^2\sec c\sec b\cos a$$

$$\overline{DE}^2 = OA^2\left(\sec^2 c + \sec^2 b - 2\sec c\sec b\cos a\right) \qquad ...(4)$$

$(3) \quad ve \quad (4) \quad den,$

$$\sec^2 b + \sec^2 c - 2\sec b \sec c \cos a = \tan^2 b + \tan^2 c - 2\tan b \tan c \cos A$$

$\sec^2 b = 1 + \tan^2 b \quad , \quad \sec^2 c = 1 + \tan^2 c \quad koyarsak,$

$$1 + \tan^2 b + 1 + \tan^2 c - 2\sec b \sec c \cos a = \tan^2 b + \tan^2 c - 2\tan b \tan c \cos A$$

$$2 - \frac{2\cos a}{\cos b \cos c} = -2\frac{\sin b \sin c}{\cos b \cos c}\cos A$$

$$-\frac{2\cos a}{\cos b \cos c} = -2\frac{\sin b \sin c}{\cos b \cos c}\cos A - 2$$

$$\pm 2\cos a = \pm 2\sin b \sin c \cos A \pm 2\cos b \cos c$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

bulunur ki bu, kuresel ucgende kenara iliskin

cos *teoremidir. Bunun gibi,*

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \quad$ *yazilabilir.*

Sinüs Formülü

Bu formül cosinüs formülünden yararlanarak çıkarılabilir :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c$$

$$\textit{Her} \quad \textit{iki} \quad \textit{tarafin} \quad \textit{karesi} \quad \textit{alinirsa},$$

$$\sin^2 b \sin^2 c \underbrace{\cos^2 A}_{1-\sin^2 A} = \cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c$$

$$\underbrace{\sin^2 b}_{1-\cos^2 b} \underbrace{\sin^2 c}_{1-\cos^2 c} - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = \cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c$$

$$1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A =$$

$$\cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c$$

$$\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = 1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c \qquad \ldots(1)$$

Şimdi, öyle bir (+) değerli bir x niceliği olsun ki, $x^2 \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c = 1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c$ ...(2) olsun.

(1) *ve* (2) *karsilastirilirsa,*

$$x^2 \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c = \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A$$

$$x^2 \sin^2 a = \sin^2 A \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} \quad \Rightarrow \quad x = \mp \frac{\sin A}{\sin a}$$

Kuresel ucgende $a > 0^o, \quad A < 180^o$ *dir.*

Yani sin *lerin* deg*eri* (+) *dir. O halde,*

$$x = \frac{\sin A}{\sin a} \qquad olur.$$

$$b \quad kenari \quad icin \quad x = \frac{\sin B}{\sin b}$$

$$c \quad kenari \quad icin \quad x = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Bu ifadelerden de,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

elde edilir ki buna Sinüs formulu denir.

Sinüs(kenar)xKosinüs(açı) formülü

$b \quad kenarina \quad iliskin \quad \cos \quad formulu;$

$$\cos b = \cos a \cos c + \underbrace{\sin a \sin c \cos B}_{ya\ln\imath z \quad birakirsak}$$

$$\sin a \sin c \cos B = \cos b - \underbrace{\cos a}_{\cos \quad formulu \quad yaz.} \cos c$$

$$\sin a \sin c \cos B = \cos b - \cos c\left(\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A\right)$$

$$= \cos b - \cos^2 c \cos b - \sin b \sin c \cos c \cos A$$

$$= \cos b \underbrace{\left(1 - \cos^2 c\right)}_{\sin^2 c} - \sin b \sin c \cos c \cos A$$

$$\sin a \sin c \cos B = \cos b \sin^2 c - \sin b \sin c \cos c \cos A$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \qquad bulunur.$$

$Benzer \quad sekilde,$

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A$$
$$\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B$$
$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$$
$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$
$$\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C$$

Kosinüs(kenar)xKosinüs(açı) formülü ;

$$\cos b = \cos a \underbrace{\cos c}_{\cos\ formulu\ koy.} + \sin a \sin c \cos B$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \qquad idi,$$
$$\cos b = \cos^2 a \cos b + \cos a \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin c \cos B$$
$$\cos b - \cos^2 a \cos b = \cos b\left(1 - \cos^2 a\right) = \cos b \sin^2 a$$
$$\cos b \sin^2 a = \sin a \sin b \cos a \cos C + \sin a \sin c \cos B$$

$Her \quad iki \quad yani \quad (\sin a \sin b) \quad ye \quad bolunurse,$

$$\cot b \sin a = \underbrace{\cos a \cos C}_{cekilirse} + \frac{\sin c}{\sin b} \cos B$$

$$\cos a \cos C = \cot b \sin a - \frac{\sin c}{\sin b} \cos B$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad idi \Rightarrow \quad \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin C} \quad kullanilirsa,$$

$$\cos a \cos C = \cot b \sin a - \cot B \sin C \quad elde \quad edilir.$$

$Benzer \quad sekilde,$

$$\cos b \cos C = \cot a \sin b - \cot A \sin C$$

$$\cos b \cos A = \cot c \sin b - \cot C \sin A$$

$$\cos c \cos A = \cot b \sin c - \cot B \sin A$$

$$\cos c \cos B = \cot a \sin c - \cot A \sin B$$

$$\cos a \cos B = \cot c \sin a - \cot C \sin B$$

$yazilabilir.$

A’B’C’ küresel üçgeni ABC küresel üçgeninin uçlaklar üçgeni ise, bu iki üçgenin öğeleri arasında a’+A=180^o ve A’+a=180^o gibi bağıntılar vardır. Bu özellikten yararlanarak diğer formüller bulunabilir :

Açılar için cos formülü ;

cos(kenar) formüllerinden yararlanarak,

cos a = cos b cos c + sin b sin c cos A

Burada a, b, c ve A nın uçlaklar cinsinden değerleri yazılırsa,

cos(180-A’)=cos(180-B’)cos(180-C’)+sin(180-B’)sin(180-C’)cos(180-a’)

- cos A’ = + cos B’ cos C’ – sin B’ sin C’ cos a’

cos A = - cos B cos C + sin B sin C cos a bulunur.

Benzer şekilde,

cos B = - cos A cos C + sin A sin C cos b

cos C = - cos A cos B + sin A sin B cos c yazılabilir.

sin(açı)xcos(kenar) formülleri ;

sin (kenar) x cos (açı) formüllerinden yararlanarak,

sin a cos B = cos b sin c – sin b cos c cos A idi.

yine uçlaklar üçgen özelliğini kullanarak,

sin (180-A') cos (180-b') = cos (180-B') sin (180-C') –

sin (180-B') cos (180-C') cos (180-a')

- sin A' cos b' = - cos B' sin C' – sin B' cos C' cos a'

sin A cos b = cos B sin C + sin B cos C cos a bulunur.

Benzer şekilde,

sin A cos c = cos C sin B + sin C cos B cos a

sin B cos a = cos A sin C + sin A cos C cos b

sin B cos c = cos C sin A + sin C cos A cos b

sin C cos a = cos A sin B + sin A cos B cos c

sin C cos b = cos B sin A + sin B cos A cos c yazılabilir.

Kenarı veya açısı 90^o olan Küresel üçgende bağıntılar

Bir açısı 90^o olan küresel üçgene "Dik üçgen" denir.

DİK AÇILI KÜRESEL ÜÇGEN

ABC küresel üçgeninde A=90^o olsun.

1- Kenar için cos teoremi,

$$\cos a = \cos b \cos c + \underbrace{\sin b \sin c \cos A}_{0}$$

$$\cos a = \cos b \cos c \qquad \ldots(1)$$

2- Sinüs formülü,

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \qquad , A = 90^o \quad ise,$$

$$\sin b = \sin a \sin B \qquad \ldots(2)$$

$$\sin c = \sin a \sin C \qquad \ldots(3)$$

3- sin(kenar) x cos(açı) formülü,

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \underbrace{\cos A}_{0}$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c$$

$$\cos B = \cos b \, \frac{\sin c}{\underbrace{\sin a}_{\sin C \;\; (3)'den}} \;\Rightarrow\; \cos B = \cos b \sin C \qquad \text{...(4)}$$

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \underbrace{\sin c \cos b \cos A}_{0}$$

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b$$

$$\cos C = \cos c \, \frac{\sin b}{\underbrace{\sin a}_{\sin B \;\; (2)'den}} \;\Rightarrow\; \cos C = \cos c \sin B \qquad \text{...(5)}$$

$$\underbrace{\sin b \cos A}_{0} = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$$

$$\cos a \sin c = \sin a \cos c \cos B$$

$$\cos B = \cot a \tan c \qquad \text{...(6)}$$

$$\underbrace{\sin c \cos A}_{0} = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C$$

$$\cos C = \cot a \tan b \qquad \text{...(7)}$$

4- cos(kenar) x cos(açı) formülü,

$$\underbrace{\cos b \cos A}_{0} = \sin b \cot c - \underbrace{\sin A}_{1} \cot C$$

$$\sin b = \tan c \cot C \qquad \ldots(8)$$

$$\sin c = \tan b \cot B \qquad \ldots(9)$$

5- sin(açı) x cos(kenar) formülü,

$$\sin B \cos a = \underbrace{\cos A \sin C}_{0} + \underbrace{\sin A}_{1} \cos C \cos b$$

$$\sin B \cos a = \cos C \cos b \qquad \ldots(10)$$

$$\sin C \cos a = \underbrace{\cos A \sin B}_{0} + \underbrace{\sin A}_{1} \cos B \cos c$$

$$\sin C \cos a = \cos B \cos c \qquad \ldots(11)$$

(10) *ve* (11) *taraf tarafa bolunurse,*

$$\frac{\sin B \cos a}{\cos B \cos c} = \frac{\cos C \cos b}{\sin C \cos a}$$

$$\tan B \frac{\cos a}{\cos c} = \cot C \frac{\cos b}{\cos a}$$

$$\cos a = \cot B \cot C \frac{\cos b \cos c}{\underbrace{\cos a}_{(1)'den \;\; \cos a = \cos b \cos c}}$$

$$\cos a = \cot B \cot C \qquad \ldots(12) \qquad bulunur.$$

(1) ve (12) den cos a = cos b cos c = cotg B cotg C

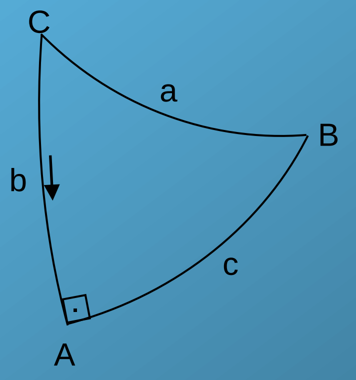
(2) ve (8) den sin b = sin a sin B = tg c cotg C

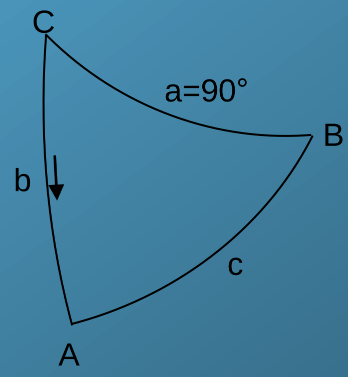
(3) ve (9) dan sin c = sin a sin C = tg b cotg B

(4) ve (6) dan cos B = cos b sin C = cotg a tg c

(5) ve (7) den cos C = cos c sin B = cotg a tg b

elde edilir. Bunları akılda tutmak güç olduğundan, daha kolay elde etme yöntemleri şöyle verilebilir :





A) Daire Kuralı :

Gidiş (ok yönünde) sırasına göre elemanlar :

1- açı 90^{o} ise, örneğin A=90^{o} için elemanların sırası,

b, c, 90-B, 90-a, 90-C

2- Kenar 90^{o} ise, örneğin a=90^{o} ise elemanların sırası,

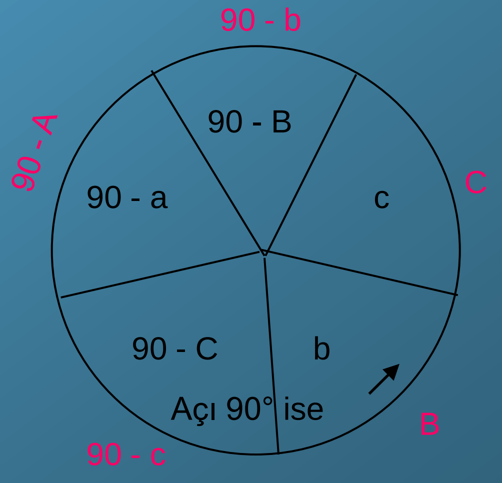
B, C, 90-b, 90-A, 90-c

şeklindedir. Kural :

sin (öğe) = karşı öğelerin cos leri çarpımı

veya,

sin (öğe) = komşu öğelerin tg ları çarpımı



B) Beşgen (NEPER BEŞGENİ) Kuralı :

1- $\hat{A}=90^{o}$ ise, gidiş (ok yönünde) elemanların sırası,

90-b, 90-c, B, a, C

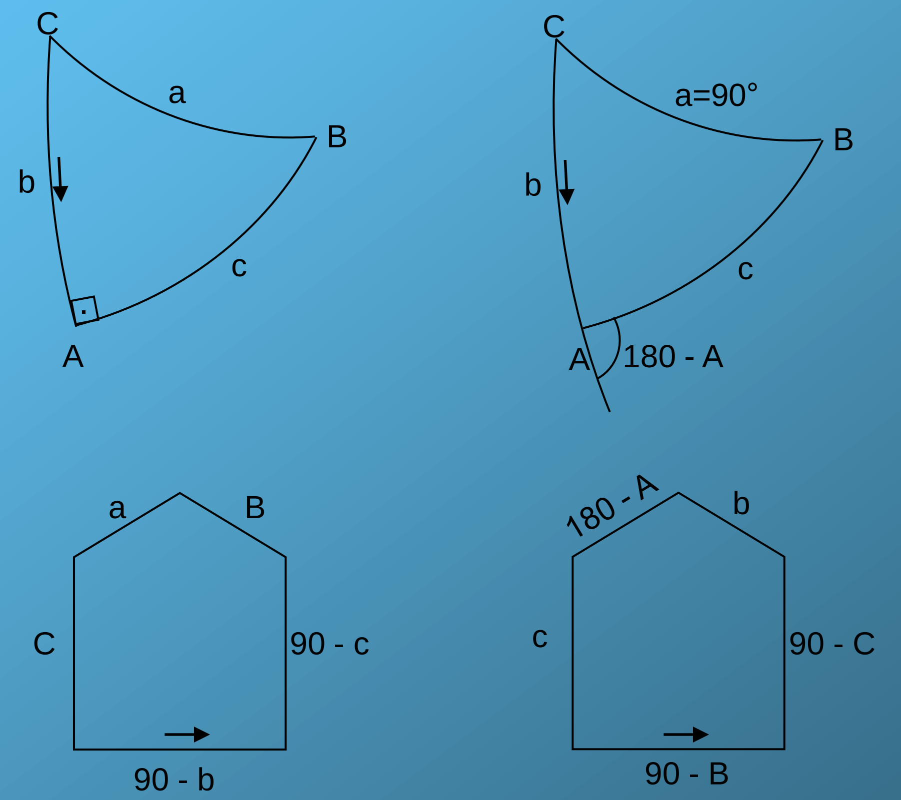
2-$a=90^{o}$ ise, gidiş (ok yönünde) elemanların sırası,

90-B, 90-C, b, 180-A, c

şeklindedir. Kural :

cos (öğe) = karşı öğelerin sin leri çarpımı veya,

cos (öğe) = komşu öğelerin cotg ları çarpımı dır.



YARDIMCI (İkincil) FORMÜLLER :

Yukarıda verilen temel formüller, toplama ve çıkarma işlemlerini içermesinden dolayı hesaplamada (özellikle logaritmik işlem kullanılarak yapılacak hesaplamalarda) pek elverişli değildirler.Bu nedenle, çarpma, bölme, kuvvet ve kök işlemlerini içeren ve temel formüllerden yararlanarak çıkarılan formüllere “Yardımcı veya ikincil formüller” denir. Bunlar şöyle sıralanabilirler :

1. BORDA FORMÜLLERİ

cos formüllerinden yararlanılır.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$Simdi \quad 1 - \cos A \quad ve \quad 1 + \cos A \quad yi \quad olustursak,$$

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\cos(b - c) = \sin b \sin c + \cos b \cos c \qquad oldugundan,$$

$$1 - \cos A = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \sin c} \qquad \ldots(1)$$

$$1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$-\cos(b + c) = \sin b \sin c - \cos b \cos c \qquad oldugundan,$$

$$1 + \cos A = \frac{-\cos(b + c) + \cos a}{\sin b \sin c} \qquad \ldots(2)$$

$$1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2} \quad ve \quad (1) \quad den;$$

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\overbrace{\cos(b-c)}^{\cos x}-\overbrace{\cos a}^{\cos y}}{\sin b\sin c} \quad yazilabilir.$$

$$1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2} \quad ve \quad (2) \quad den;$$

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\sin c} \quad yazilabilir.$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\ \sin\frac{x-y}{2} \quad ozelliginden \quad yararlanarak,$$

bulunan bu ifadeler,

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{-2\sin\frac{b-c+a}{2}\ \sin\frac{b-c-a}{2}}{\sin b\sin c}$$

$$\left[burada \quad \sin\frac{-(a+c-b)}{2}=\sin\frac{b-c-a}{2} \quad yazilabilir\right]$$

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\ \sin\frac{a+c-b}{2}}{\sin b\sin c} \qquad ve,$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\ \sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\sin c} \qquad olur.$$

$$a+b+c=2u \quad alinirsa,$$
$$a+b-c=2(u-c)$$
$$a+c-b=2(u-b)$$
$$b+c-a=2(u-a)$$
$$olur \quad ki \quad bunlar \quad kullanilirsa,$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin^2\frac{A}{2} &= \frac{\sin\frac{2(u-c)}{2}\ \sin\frac{2(u-b)}{2}}{\sin b \sin c} \\
\sin\frac{A}{2} &= \left[\frac{\sin(u-c)\sin(u-b)}{\sin b \sin c}\right]^{1/2} \\
\cos^2\frac{A}{2} &= \frac{\sin\frac{2u}{2}\ \sin\frac{2(u-a)}{2}}{\sin b \sin c} \\
\cos\frac{A}{2} &= \left[\frac{\sin u \sin(u-a)}{\sin b \sin c}\right]^{1/2}
\end{aligned}\right\} \ldots(3)$$

(3) bağıntıları taraf tarafa oranlanırsa,

$$\tan\frac{A}{2}=\left[\frac{\sin(u-c)\sin(u-b)}{\sin u\sin(u-a)}\right]^{1/2} \qquad ...(4)$$

$(4)'un \quad pay \quad ve \quad paydasi \quad \sin(u-a) \quad ile \quad carpilirsa,$

$$\tan\frac{A}{2}=\left[\frac{\sin(u-a)\sin(u-b)\sin(u-c)}{\sin u}\right]^{1/2}\frac{1}{\sin(u-a)}$$

$$m=\left[\frac{\sin(u-a)\sin(u-b)\sin(u-c)}{\sin u}\right]^{1/2} \qquad ile \quad gosterilirse,$$

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\frac{m}{\sin(u-a)} \quad ve \quad benzer \quad sekilde,\\ \tan\frac{B}{2}&=\frac{m}{\sin(u-b)}\\ \tan\frac{C}{2}&=\frac{m}{\sin(u-c)}\end{aligned}\right\} \quad ...(5)$$

bulunur ki bu formüllere BORDA formülleri denir. Küresel üçgenin a, b, c elemanları verilip A, B, C elemanları istendiğinde kullanılır.

ABC küresel üçgeninin uçlaklar üçgeni A’B’C’ küresel üçgeni ise,

$a + A' = 180^o$, $A + a' = 180^o$

$a = 180 - A'$, $b = 180 - B'$, $c = 180 - C'$ yazılabilir ve

$A = 180 - a'$, $B = 180 - b'$, $C = 180 - c'$ yazılabilir.

Diğer taraftan $a + b + c = 2u$ idi.

$(180 - A') + (180 - B') + (180 - C') = 2u$, açılırsa

$2u = 540 - (A' + B' + C')$, $A' + B' + C' = 2U$ denirse,

$2u = 540 - 2U \rightarrow u = 270 - U$ elde edilir.

$(u - a) = 270 - U - (180 - A') = 90 - (U - A')$

$(u - b) = 90 - (U - B')$, $(u - c) = 90 - (U - C')$ olur. Bu bağıntılar (5) te yerine konursa,

$$A = 180 - a' \Rightarrow \frac{A}{2} = 90 - \frac{a'}{2} \quad oldugu \quad dikkate \quad alinarak,$$

$$\tan\frac{A}{2} = \left[\frac{\sin(u-b)\sin(u-c)}{\sin u \sin(u-a)}\right]^{1/2}$$

$$\cot\frac{a'}{2} = \sqrt{\frac{[\cos(U-B')\cos(U-C')]}{-\cos U \cos(U-A')}}$$

$$\cot\frac{a'}{2}=\left[\frac{\cos(U-B')\cos(U-C')}{-\cos U\cos(U-A')}\right]^{1/2}$$

$$\tan\frac{a'}{2}=\left[\frac{-\cos U\cos(U-A')}{\cos(U-B')\cos(U-C')}\right]^{1/2}$$

Bunun pay ve paydasi $\cos(U-A')$ *ile carpilirsa,*

$$\tan\frac{a'}{2}=\left[\frac{-\cos U}{\cos(U-B')\cos(U-C')\cos(U-A')}\right]^{1/2}\cos(U-A')$$

olur. Uclaklar ucgeni ozelligind en de,

$$\tan\frac{a}{2}=\left[\frac{-\cos U}{\cos(U-A)\cos(U-B)\cos(U-C)}\right]^{1/2}\cos(U-A)$$

yazilabili r.

$$n=\sqrt{\frac{-\cos U}{\cos(U-A)\cos(U-B)\cos(U-C)}}$$ *denirse,*

$$\left.\begin{aligned}&\tan\frac{a}{2}=n\ \cos(U-A) \quad \textit{olur. Benzer sekilde,}\\ &\tan\frac{b}{2}=n\ \cos(U-B)\\ &\tan\frac{c}{2}=n\ \cos(U-C) \quad \textit{yazilabili r.}\end{aligned}\right\}\ldots(6)$$

Burada $A+B+C=2U$ *dur.*

Bunlar da açılar için BORDA formülleridir. Açı elemanları verilip kenar elemanlar istendiğinde yararlanılır.

2.GAUSS FORMÜLLERİ

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{C}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2}=\sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2}=\cos\frac{C}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{C}{2}\sin\frac{a+b}{2}$$

Bu formüllerde harfler arasında belli bir sıra ile değiştirme yapılarak, benzer şekilde sekiz tane formül daha bulunabilir. Bu formüllerin çıkarılışı “Kızılırmak, A., 1977, Gökbilim Dersleri, Cilt I, Küresel Gökbilim, Ege Üni. Matbaası, Bornova” kitabında ayrıntılı bir şekilde verilmektedir.

3. NEPER FORMÜLLERİ

Gauss formüllerinin taraf tarafa oranından elde edilirler :

$$\tan\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}$$

$$\tan\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}$$

$$\tan\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}$$

Küresel Üçgenin Alanı

Küresel üçgen düzlemsel üçgenden şu özellikleri ile farklıdır : Genellikle, düzlemsel üçgenin kenarları "uzunluk" olarak, küresel üçgenin kenarları ise "açı" olarak ölçülür. Ancak küresel üçgenin üzerinde bulunduğu kürenin yarıçapı bilinirse, kenarları "uzunluk" olarak hesaplanabilir. Düzlemsel üçgenin iç açılarının toplamı 180^o iken küresel üçgenin iç açılarının toplamı 180^o den büyüktür. Aradaki farka ilgili küresel üçgenin "Küresel artığı" denir. Yani verilen bir küresel üçgen için küresel artık (=E),

$$E = A+B+C - 180^o$$

ile tanımlanır. Küresel üçgenin üzerinde bulunduğu kürenin yarıçapı r ise, Küresel üçgenin S alanı,

$$S = \frac{\pi \quad r^2 E}{180^o}$$

$$formulu \quad ile \quad bulunur.$$

$$Kenarlar \quad verilmis \quad ise \quad Alan \quad icin \quad E \quad ,$$

$$\tan\frac{E}{4} = \sqrt{\tan\frac{u}{2}\tan\frac{u-a}{2}\tan\frac{u-b}{2}\tan\frac{u-c}{2}}$$

$$ile \quad bulunur.$$

Buna L'Huilier formülü denir. Burada 2u = a + b + c dir.