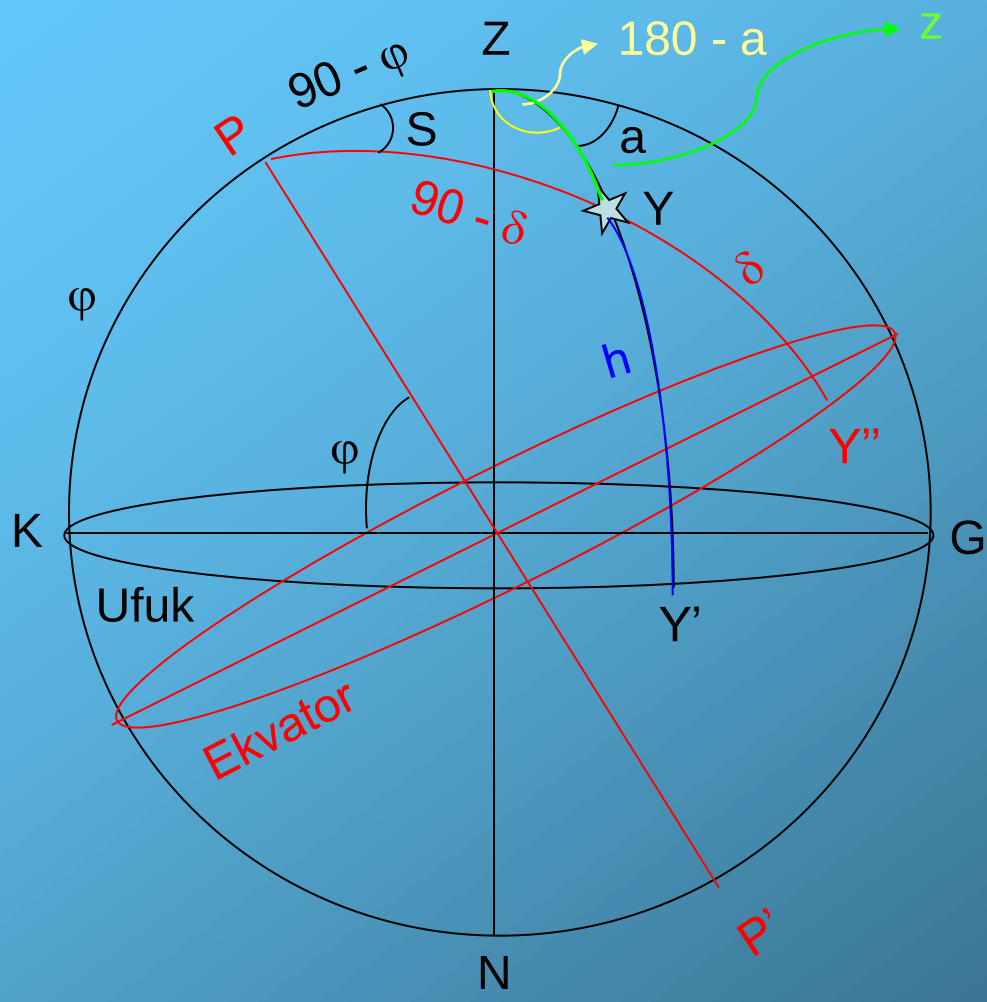
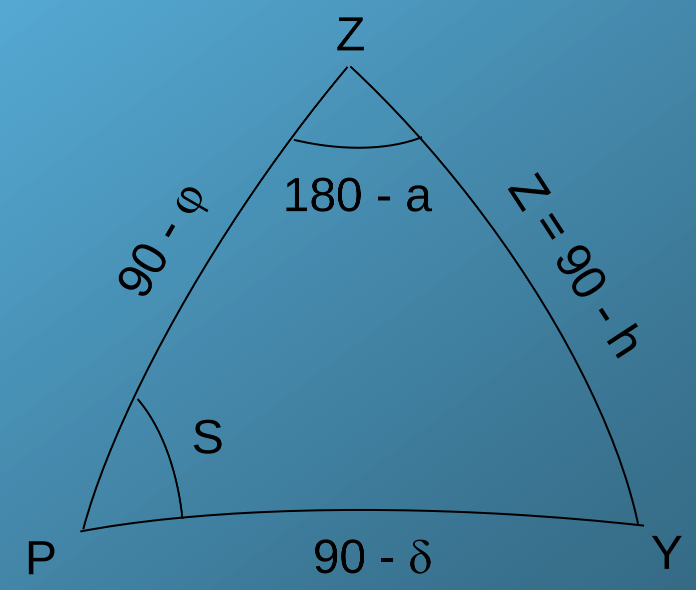
Kon Düzenekleri Arasındaki Dönüşümler:

1.) Ufuk kon düzeneği ile Saat kon düzeneği arasındaki dönüşüm

Ufuk K. S.		Saat K. S.
a, h	→	S, δ



Konum üçgeni



Örnek: a, h değerleri verilsin, S ve δ istensin

$\cos(90 - \delta) = \cos(90 - \varphi) . \cos z + \sin(90 - \varphi) . \sin z . \cos(180 – a)$

$\sin \delta = \sin \varphi . \cos z - \cos \varphi . \sin z.\cos a$

Buradan φ belli ise δ bulunur.

$\cos z = \sin \varphi . \sin \delta + \cos \varphi . \cos \delta . \cos S$ den

$\cos S = (\sin \varphi . \sin \delta - \cos z) / \cos \varphi . \cos \delta$ dan

z ve δ belli olduğu için S bulunur. Veya sinüs teoreminden,

$\sin S / \sin z = \sin(180 – a) / \sin(90 - \delta) \rightarrow \sin S = \sin z . \sin a / \cos \delta$ dan S bulunur.

S ve δ belli, a ve h (veya z) istenirse, bir önceki yapılan

$\cos z = \sin \varphi . \sin \delta + \cos \varphi . \cos \delta . \cos S$ dan z bulunur.

Yine sinüs teoreminden,

$\sin a = \cos \delta . \sin S / \sin z \rightarrow$ a bulunur.

Dikkat: Sinüs teoreminden bulunacak açılar iki anlamlıdır. Açı ya A olur veya 180 – A olur. Şekil çizerek denetleme yapılır.

İlk durum için denetleme formülü;

$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A$ idi

$\sin(90 - \delta) \cdot \cos S = \cos z \cdot \sin(90 - \varphi) - \sin z \cdot \cos(90 - \varphi) \cdot \cos(180 - a)$

$\cos \delta \cdot \cos S = \cos z \cdot \cos \varphi + \sin z \cdot \sin \varphi \cdot \cos a$

2. Durum için:

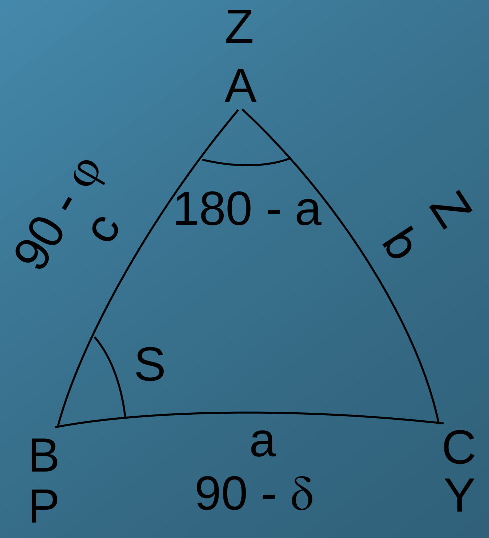
$\sin b \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin c - \sin a \cdot \cos c \cdot \cos B$

$\sin z \cdot \cos(180 - a) = \cos(90 - \delta) \cdot \sin(90 - \varphi) - \sin(90 - \delta) \cdot \cos(90 - \varphi) \cdot \cos S$

$-\sin z \cdot \cos a = \sin \delta \cdot \cos \varphi - \cos \delta \cdot \sin \varphi \cdot \cos S$

$\sin z \cdot \cos a = -\sin \delta \cdot \cos \varphi + \cos \delta \cdot \sin \varphi \cdot \cos S$

elde edilir.



2.) Ekvator kon düzeneği ile Saat kon düzeneği arasındaki dönüşüm

Ekvator K. S. → Saat K. S.

α, δ → S, δ

Zaman: Dönemli olarak değişen olaylar ile tanımlanır.

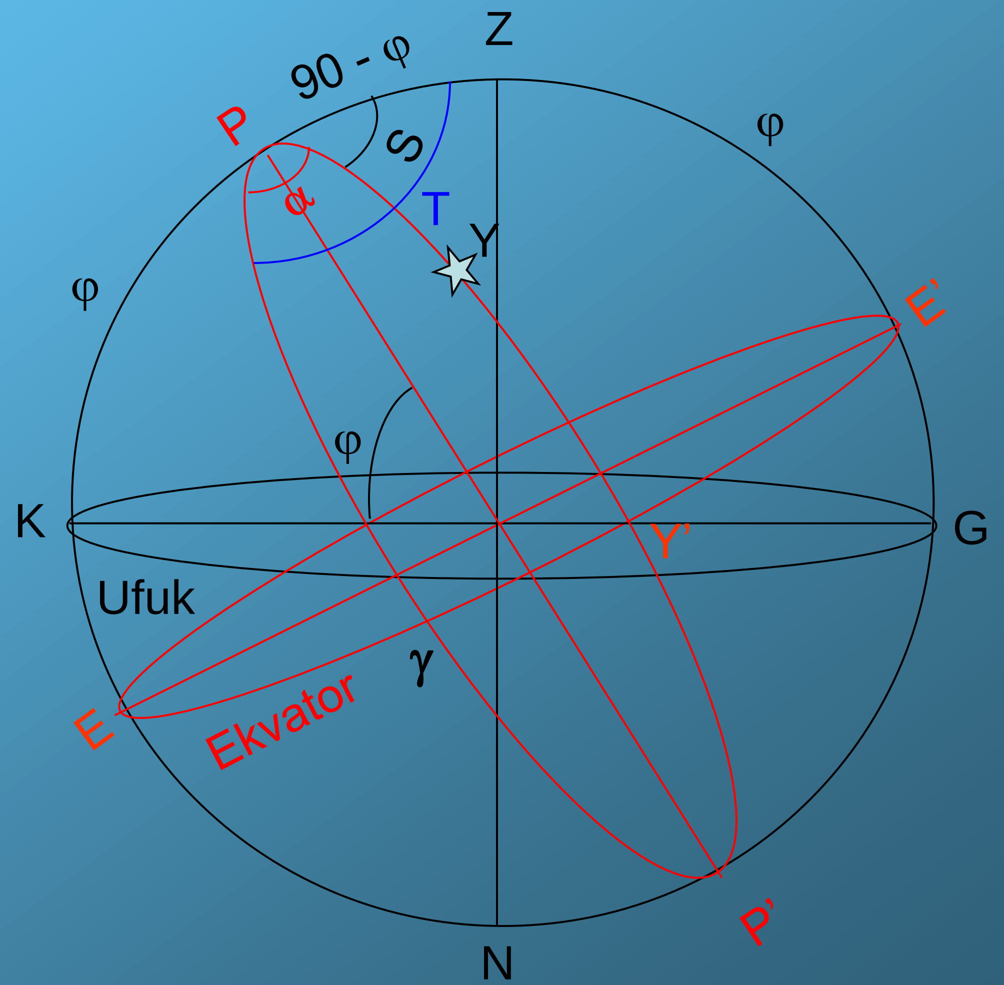
1 Yıldız Günü: Yıldızın öğlen çemberinden ard arda iki geçişi arasındaki süreye denir.

Yıldız Zamanı: Yıldızın (Koç noktası) saat açısının belirttiği zamandır.

1 Yıldız Günü = $23^{sa}\ 56^{dk}\ 04^{sn}$

γ(Koç) noktasının saat açısı, ilgili yerin veya yıldızın yıldız zamanını verir.

Her yıldız için S = 0 iken T = α olur.

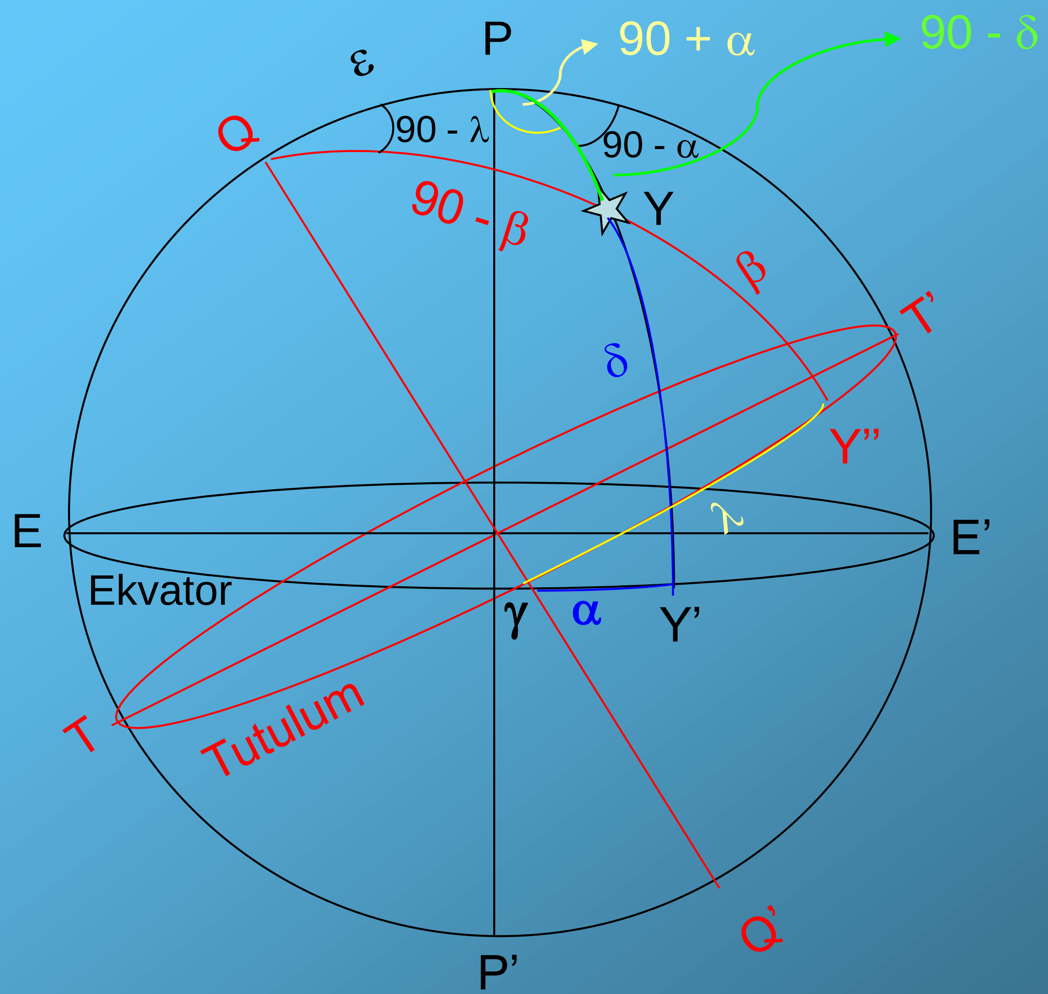


$$T, \alpha, S \rightarrow T = \alpha + S$$

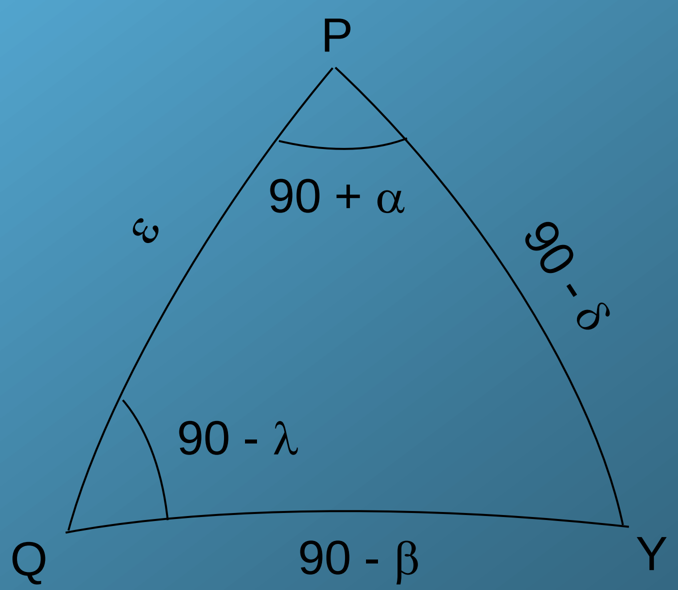
3.) Ekvator kon düzeneği ile Tutulum kon düzeneği arasındaki dönüşüm

<u>Ekvator K. S.</u> → <u>Tutulum K. S.</u>

α, δ → λ, β



<u>Konum üçgeni</u>



1-) α, δ değerleri verilsin, λ ve β istensin

$\cos(90 - \beta) = \cos\varepsilon \,.\, \cos(90 - \delta) + \sin\varepsilon \,.\, \sin(90 - \delta) \,.\, \cos(90 + \alpha)$

$\sin\beta = \cos\varepsilon \,.\, \sin\delta - \sin\varepsilon \,.\, \cos\delta \,.\, \sin\alpha \rightarrow \beta$ bulunur.

$\sin(90 - \lambda) / \sin(90 - \delta) = \sin(90 + \alpha) / \sin(90 - \beta)$

$\rightarrow \cos\lambda / \cos\delta = \cos\alpha / \cos\beta$

$\cos\lambda = (\cos\alpha \;\; \cos\delta) / \cos\beta \rightarrow \lambda$ bulunur

Denetlemek için Sin (kenar) . Cos (açı) formülü uygulanırsa,

$\mathrm{Sin}(90 - \beta) \,.\, \mathrm{Cos}(90 - \lambda) = \cos(90 - \delta) \,.\, \mathrm{Sin}\,\varepsilon - \sin(90 - \delta) \,.\, \cos\varepsilon \,.\, \mathrm{Cos}(90 + \alpha)$

$\mathrm{Cos}\,\beta \,.\, \mathrm{Sin}\,\lambda = \sin\delta \,.\, \mathrm{Sin}\,\varepsilon + \cos\delta \,.\, \cos\varepsilon \,.\, \sin\alpha$

2-) λ, β değerleri verilsin, α ve δ istensin

$\cos(90 - \delta) = \cos\varepsilon \,.\, \cos(90 - \beta) + \sin\varepsilon \,.\, \sin(90 - \beta) \,.\, \cos(90 - \lambda)$

$\sin\delta = \cos\varepsilon \,.\, \sin\beta + \sin\varepsilon \,.\, \cos\beta \,.\, \sin\lambda \rightarrow \delta$ bulunur.

Yukarıdaki sinüs teoreminden

$\cos\alpha = (\cos\lambda \,.\, \cos\beta) / \cos\delta \rightarrow \alpha$ bulunur

Denetlemek için,

$\mathrm{Sin}(90 - \delta) \,.\, \mathrm{Cos}(90 + \alpha) = \cos(90 - \beta) \,.\, \mathrm{Sin}\,\varepsilon - \sin(90 - \beta) \,.\, \cos\varepsilon \,.\, \mathrm{Cos}(90 + \lambda)$

$-\mathrm{Cos}\,\delta \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha = \sin\beta \,.\, \mathrm{Sin}\,\varepsilon - \cos\beta \,.\, \cos\varepsilon \,.\, \sin\lambda$

$\mathrm{Cos}\,\delta \,.\, \mathrm{Sin}\,\alpha = -\sin\beta \,.\, \mathrm{Sin}\,\varepsilon + \cos\beta \,.\, \cos\varepsilon \,.\, \sin\lambda$

Burada ε tutulumun ekvatora göre eğikliğidir. 1900.0 ılımı için $\varepsilon = 23° \, 27' \, 08''.26$

Genel olarak,

$\varepsilon = 23° \, 27' \, 08''.26 - 46''.845T - 0''.0059T^2 + 0''.00181T^3$ dür. Burada T = 1900 den beri geçen yüzyıl sayısıdır.

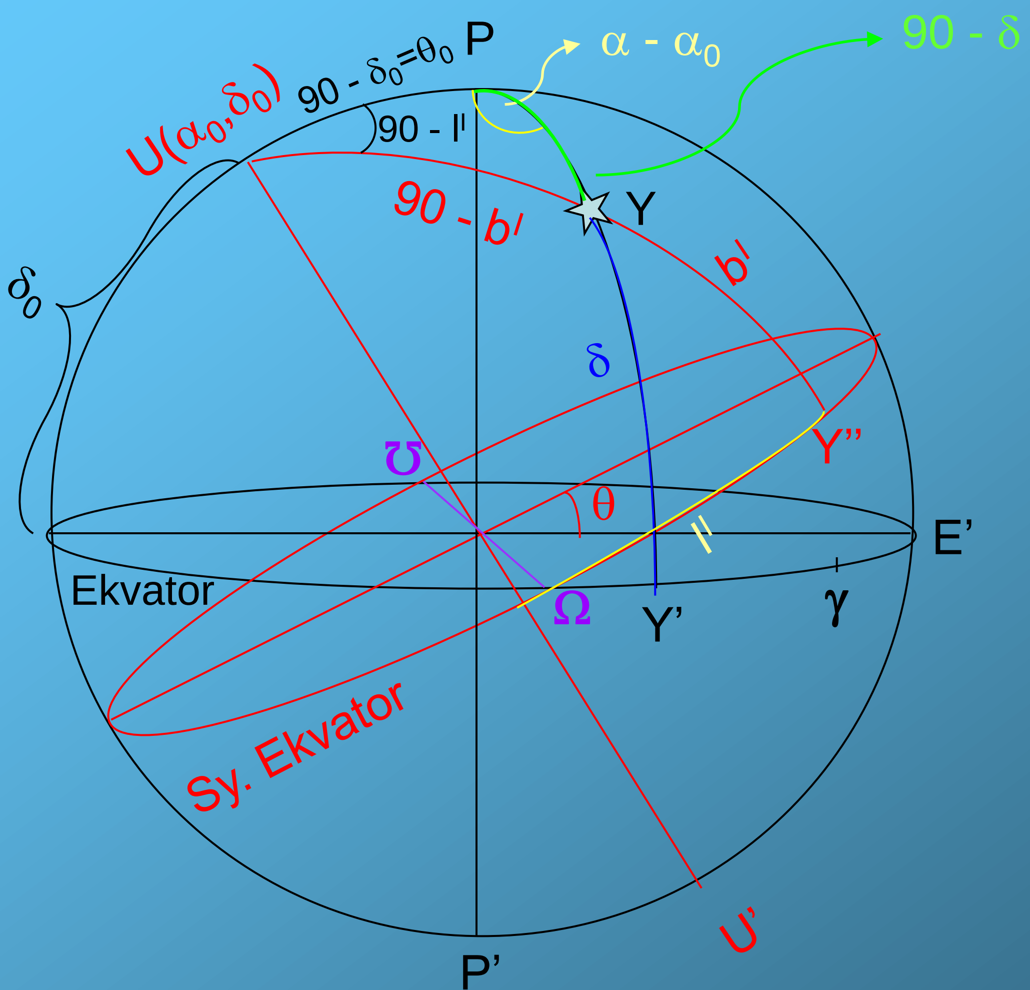
T = Yıl – 1900 / 100 t = 1994 için T = 0.94 tür ve 1994 için $\varepsilon = 23° \, 26' \, 24''.22$

Güneş için $\beta_\odot = 0$ olduğundan yukarıdaki formüller

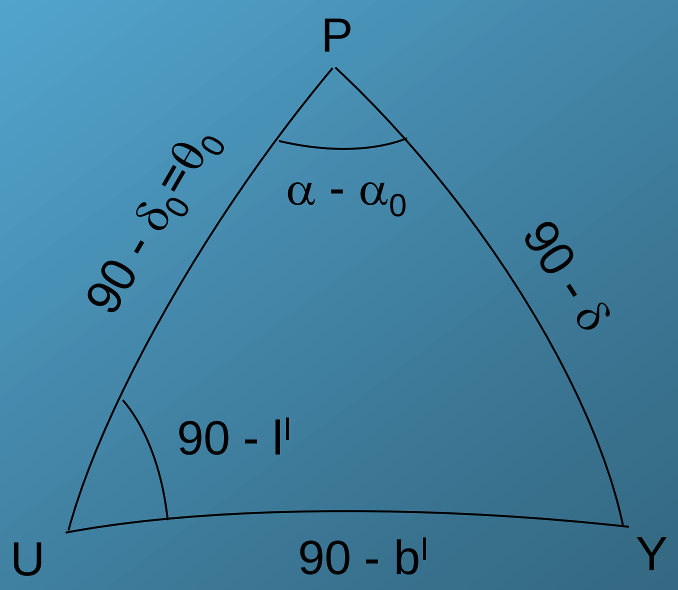
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}\,\alpha_\odot &= \cos\varepsilon \,.\, \mathrm{tg}\,\lambda_\odot \\ \mathrm{tg}\,\delta_\odot &= \mathrm{tg}\,\varepsilon \,.\, \sin\alpha_\odot \end{aligned}\right\}$$ şeklinde sadeleşir

4.) Ekvator kon düzeneği ile Samanyolu (Gökada) kon düzeneği arasındaki dönüşüm

Ekvator K. S.	→	Gökada K. S.
α, δ		l, b



Konum üçgeni



U'nun koordinatları, 1950.0 için

$\alpha_0 = 12^{sa}\ 49^{dk}$

$\delta_0 = 27^\circ\ 24'$

α, δ değerleri verilsin, l ve b istensin

$\text{Cos}\,(90 - b^{I}) = \cos\,(90 - \delta)\,.\,\text{Cos}\,(90 - \delta_0) + \sin\,(90 - \delta)\,.\,\text{Sin}\,(90 - \delta_0)\,.\,\text{Cos}\,(\alpha - \alpha_0)$

$\text{Sin}\,b^{I} = \sin\delta\,.\,\text{Sin}\,\delta_0 + \cos\delta\,.\,\cos\delta_0\,.\cos\,(\alpha - \alpha_0)$

$\text{Sin}\,(90 - l^{I}) \,/\, \sin\,(90 - \delta) = \sin\,(\alpha - \alpha_0) \,/\, \sin\,(90 - b^{I})$

$\rightarrow \text{Cos}\,l^{I} = \cos\delta\,.\,\text{Sin}\,(\alpha - \alpha_0) \,/\, \cos b^{I}$

sinüs – cosinüs teoreminden,

$\text{Sin}\,b^{I}\,.\,\text{Sin}\,l^{I} = \cos\delta_0\,.\,\text{Sin}\,\delta - \cos\delta\,.\,\text{Sin}\,\delta_0\,.\,\text{Cos}\,(\alpha - \alpha_0)$

l^{II}, b^{II} için ise $l^{II} = l^{I} + 32^{\circ}$ ve $b^{II} = b^{I} + 1^{\circ}.4$ ile dönüşüm yapılır.

Torgand I., 1961, Ann. Obs. Land 15, 16, 17 ekleri,

$(\alpha, \delta) \rightarrow (l^{II}, b^{II})$; $(l^{I}, b^{I}) \rightarrow (l^{II}, b^{II})$

$l^{II} = l^{I} + \Delta l$; $b^{II} = b^{I} + \Delta b$

Δl ve Δb değerleri çizelgelerden bulunur.

l, b değerleri verilsin, α ve δ istensin

$\text{Cos}(90 - \delta) = \cos(90 - \delta_0) \cdot \text{Cos}(90 - b^I) + \sin(90 - \delta_0) \cdot \text{Sin}(90 - b^I) \cdot \text{Cos}(90 - l^I)$

$\text{Sin}\,\delta = \sin \delta_0 \cdot \text{Sin}\, b^I + \cos \delta_0 \cdot \cos b^I \cdot \sin(l^I) \rightarrow \delta$ bulunur.

$\text{Sin}(90 - l^I) / \sin(90 - \delta) = \sin(\alpha - \alpha_0) / \sin(90 - b^I)$

Sinüs teoreminden,

$\text{Sin}(\alpha - \alpha_0) = \cos b^I \cdot \text{Cos}\, l^I / \cos \delta \rightarrow \alpha$ bulunur.

sinüs – cosinüs teoreminden,

$\cos \delta \cdot \cos(\alpha - \alpha_0) = \cos \delta_0 \cdot \text{Sin}\, b^I - \text{Sin}\, \delta_0 \cdot \cos b^I \cdot \text{Sin}\, l^I$

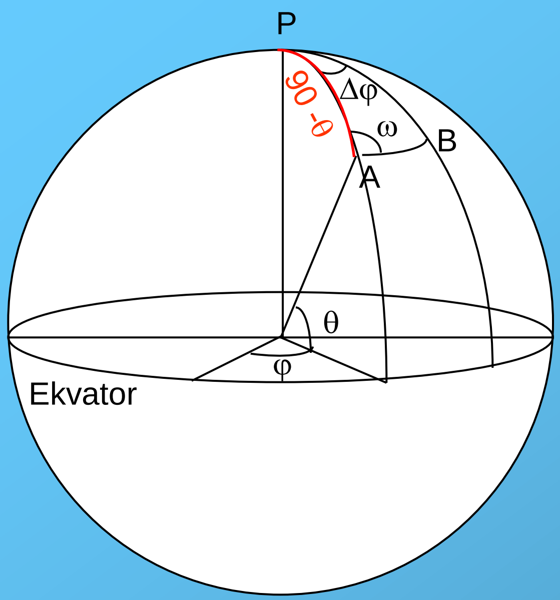
$\alpha_0^{II} = 12^{sa}\, 49^{dk} = 192^\circ.25$, $\delta_0^{II} = +27^\circ.4$ (1950)

$\alpha_0^{I} = 12^{sa}\, 42^{dk}.5$, $\delta_0^{I} = +27^\circ.725$ (1950)

Küçük Açı Formülleri:

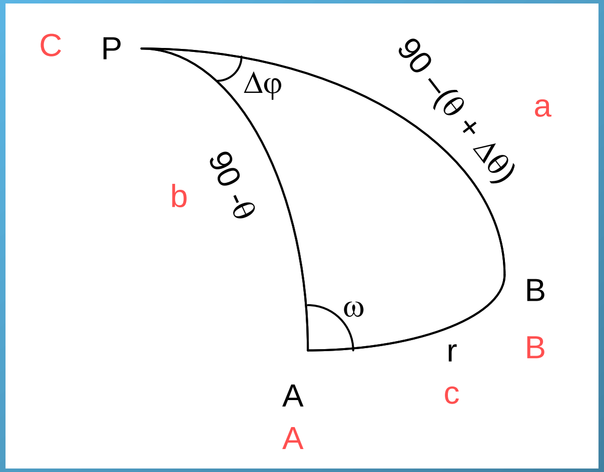
Sorun, genel olarak bir küre üzerindeki bir noktanın yerini belirten konsayıların küçük değişimlerine ilişkindir. Bunun genel çözümü ise küresel üçgen formüllerinin diferansiyeli alınarak yapılır. Elbette seçilecek formüller karşılaşılan soruna uygun olmalıdır.

Astronomide karşılaşılan sorun genelde şu olur: Yer küresi üzerinde bir A noktasının konsayıları (φ, θ) olsun. Bir süre sonra A noktası çok küçük bir yer değiştirme sonucu B gibi bir noktaya gelsin. Eğer Yer'in P kutup noktasını A ve B noktalarının büyük çember yayları ile birleştirirsek PAB gibi bir küresel üçgen elde edilir. B'nin konsayıları $(\varphi + \Delta\varphi, \theta + \Delta\theta)$ olsun. Burada $\Delta\varphi$ ve $\Delta\theta$ aranılan küçük değişimlerdir. Bunlar hesaplanırsa B noktasının yeri bulunmuş olur.



PAB = ω açısına B noktasının “KONUM AÇISI”

AB = r kenarına da B noktasının “UZAKLIĞI” denir



Δφ değişimini bulmak için PAB küresel üçgenine cos (kenar) cos (açı) teoremi uygulanırsa;

Cos b . Cos A = sin b . Cot c – sin A . Cot C idi

Cos (90 - θ) . Cos ω = sin (90 - θ) . Cot r – sin ω . Cot Δφ

Sin θ . Cos ω = cos θ . (cos r / sin r) – sin ω . Cot Δφ

Her iki yanı (sin r) ile çarparsak,

Sin r . Sin θ . Cos ω = cos θ . Cos r – sin r . Sin ω . cot Δφ

Tg Δφ = (sin r . Sin ω) / (cos r . Cos θ - sin r . Sin θ . Cos ω)   ...(1)

$\Delta\theta$ değişimi için; sinüs teoremi uygulanırsa,

Sin a . Sin B = sin b . Sin A / (-cos b)

Sin (açı) . Cos (kenar) teoremi uygulanırsa,

Sin B . Cos a = cos A . Sin C + sin A . Cos C . Cos b / (sin b)

İlk denklemi (-cos b), ikincisini (sin b) ile çarpıp bunları taraf tarafa toplarsak,

$\underbrace{\text{Sin b . Cos a . Sin B} - \text{cos b . Sin a}}_{\text{Sin (b - a)}}$. Sin B = cos A . Sin C . Sin b

+ sin A . Cos C . Cos b . Sin b

- sin b . Sin A . Cos b

Sin (b – a) . Sin B = cos A . Sin C . Sin b – sin A . Cos b . Sin b . (1 – cos C)

Olur. Her iki tarafı (sin B) ye bölersek,

Sin (b – a) = cos A . ~~Sin C~~ . (sin b / sin B) – sin A . Cos b . (sin b / sin B) . (1 – cos C)

Sin c / ~~sin C~~

Sin teoreminden yerine (sin c / sin C) yazılabilir

O zaman,

Sin (b – a) = cos A . Sin c – sin A . Cos b . (sin c / sin C) . (1 – cos C)

1 – cos C = 2 . Sin^2 (C /2) idi.

Sin C = sin (C / 2 + C / 2) = 2 . Sin (C / 2) . Cos (C / 2)

Buradan eşitlik denkleminde yerine konursa,

$\text{Sin } (b - a) = \cos A \;.\; \text{Sin } c - \sin A \;.\; \text{Cos } b \;.\; \text{Sin } c\ (\cancel{2} \;.\; \text{Sin}^{\cancel{2}} (C / 2)) / (\cancel{2} \;.\; \cancel{\text{Sin } (C / 2)} \;.\; \text{Cos } (C / 2))$

$\text{Sin } (b - a) = \sin c \;.\; (\cos A - \sin A \;.\cos b \;.\; \text{Tg } (C / 2))$ ...(2)

Bundan yararlanarak PAB üçgenine uygularsak,

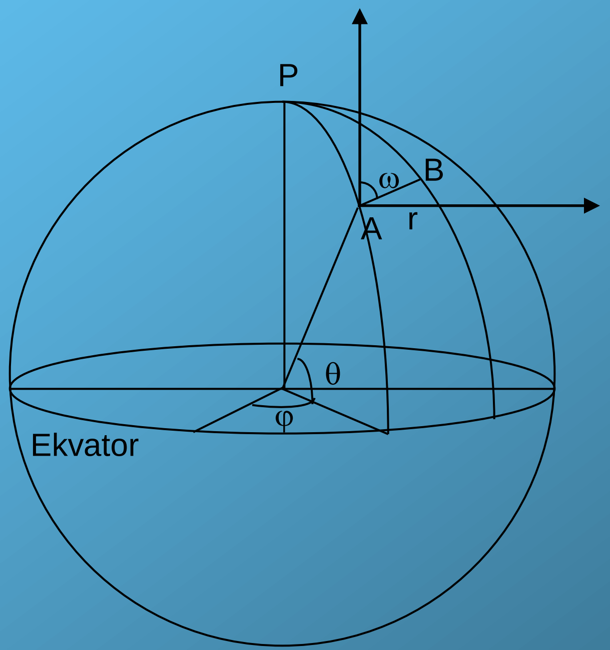
$\text{Sin } \Delta\theta = \sin r \;.\; (\cos \omega - \sin \omega \;.\; \text{Sin } \theta \;.\; \text{Tg } (\Delta\varphi / 2)$ ...(3)

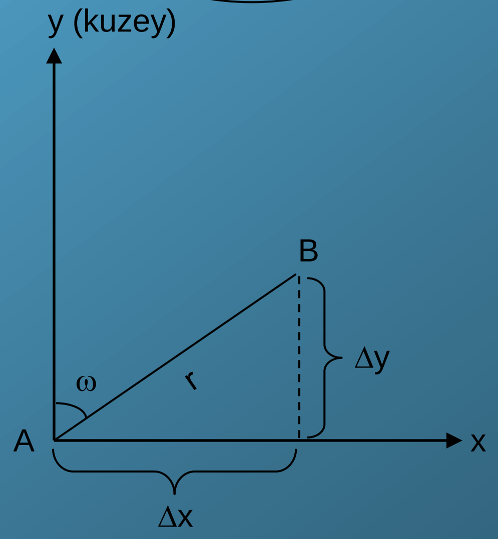
elde edilir.

Gökbilimde çok küçük yer değiştirmeler, yıldızların özdevimleridir. Bir yıldızın bir yıl içinde yaptığı açısal yer değiştirmeye onun “ÖZDEVİM” i denir. Aşağıdaki çizelgede örnek olarak kimi yıldızların özdevim değerleri verilmektedir (Kızılrmak 1977 den).

Yıldız	Özdevim (″ / yıl)
BD +4 ° 3561 (Barnard Yıldızı)	10.3
BD -36 ° 15693	6 .9
BD -37 ° 15492	6.1
BD -45 ° 1841 (Kapteyn Yıldızı)	8.7
61 Cyg	5.2
BD +36 ° 2147	4.8
Wolf 359	4.7
Proxima Cen	3.85
α Cen	3.7

Yıldızların pek çoğunun özdevimleri 1″ den küçüktür. Bu denli küçük açılar ancak 20 – 30 yıl aralıklarla yapılan konum gözlemleriyle bulunur. Bunun için, özel fotoğraf plakları kullanılır. Bunlar odak uzaklığı büyük olan teleskopların odağına yerleştirilir ve gökyüzünün bir bölgesinin resmi çekilir. Sonra ince ölçü aletleriyle plak üzerindeki yıldızların yerleri, yine aynı plak üzerine konulan bir dik kon düzeneğine göre ölçülür. Daha sonraki yıllarda aynı bölgenin aynı koşullarda çekilen resminde bu yıldızların yeni yerleri aynı dik kon düzeneğine göre tekrar ölçülerek Δx, Δy farkları bulunur. Buradaki sorun Δx, Δy farkları belli iken küresel konsayılardaki farkları nasıl buluruz? Veya bunun tam tersi de olabilir. Sorunu çözmek için, gök küresi üzerinde bir A noktası ele alalım. A noktası birkaç yıl sonra $\Delta\varphi$, $\Delta\theta$ kadar yer değiştirerek B noktasına gelmiş olsun. Kurulan kon düzeneği: A noktası başlangıç olmak üzere PA yayına A'dan çizilen teğet y-ekseni ve bu eksene A'da dik olan (+) yönlü teğet de x-ekseni olsun. B'nin açısal uzaklığı çok küçük olduğu için A ve B'yi (x, y) düzleminde kabul edelim. Bu durumda AB = r yay parçası yerine açı biriminde bir doğru parçası olarak düşünülebilir. O halde,





$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= r \,.\, \mathrm{Sin}\ \omega \\ \Delta y &= r \,.\, \cos \omega \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(4)$$

r, çok küçük olduğundan sin r = r (rad) ve cos r = 1 alınabilir.

Bu durumda (1) denklemi,

Tg $\Delta\varphi = (r \,.\, \text{Sin}\ \omega) / (\cos\theta - r \,.\, \text{Cos}\ \omega \,.\, \text{Sin}\ \theta) \rightarrow \text{tg}\ \Delta\varphi = \Delta x / (\cos\theta - \Delta y \,.\, \text{Sin}\ \theta))$

$\cos\theta \,.\, \text{Tg}\ \Delta\varphi = \Delta x / (1 - \Delta y \,.\, \text{Tg}\ \theta)$ ...(5) olur. (3) denklemi ise,

$\text{Sin}\ \Delta\theta = r \,.\, (\cos\omega - \sin\omega \,.\, \text{Sin}\ \theta \,.\, \text{Tg}\ (\Delta\varphi / 2))$

$\text{Sin}\ \Delta\theta = r \,.\, \cos\omega - r.\ \sin\omega \,.\, \text{Sin}\ \theta \,.\, \text{Tg}\ (\Delta\varphi / 2)$

$\text{Sin}\ \Delta\theta = \Delta y - \Delta x \,.\, \text{Sin}\ \theta \,.\, \text{Tg}\ (\Delta\varphi / 2)$ ...(6). Burada Δx ve Δy radyan birimindedir.

a) $\theta > 45°$ ise $\Delta\varphi$, $\Delta\theta$ değerleri (5) ve (6) dan bulunur.

b) $\theta < 45°$ ise $\Delta y \,.\, \text{Tg}\ \theta \cong 0$ olur ve $\Delta x \,.\, \text{Sin}\ \theta \,.\, \text{Tg}\ (\Delta\varphi / 2) \cong 0$ olur. O zaman,

$\cos\theta \,.\, \text{Tg}\ \Delta\varphi = \Delta x$ ...(7) ve $\text{Sin}\ \Delta\theta = \Delta y$ olur. Yani,

$\cos\theta \,.\, \Delta\varphi\ (\text{rad}) = \Delta x\ (\text{rad})$ ...(9)

$\Delta\theta\ (\text{rad}) = \Delta y\ (\text{rad})$ ...(10)

Ekvator kon düzeneğinde, $\Delta\varphi = \Delta\alpha$ ve $\Delta\theta = \Delta\delta$ dır.

a) Kutba yakın yıldızlar için $\delta > 45°$ dir. O zaman,

$\text{Cos}\ \delta \,.\, \text{Tg}\ \Delta\alpha = \Delta x / (1 - \Delta y \,.\, \text{Tg}\ \delta)$ ...(11)

$\text{Sin}\ \Delta\delta = \Delta y - \Delta x \,.\, \text{Sin}\ \delta \,.\, \text{Tg}\ (\Delta\alpha / 2)$ ...(12)

b) Ekvatora yakın yıldızlar için $\delta < 45°$ dir. O zaman,

$\text{Cos}\ \delta \,.\, \Delta\alpha\ (\text{rad}) = \Delta x\ (\text{rad})$ ...(13)

$\Delta\delta\ (\text{rad}) = \Delta y\ (\text{rad})$ ...(14) olur.