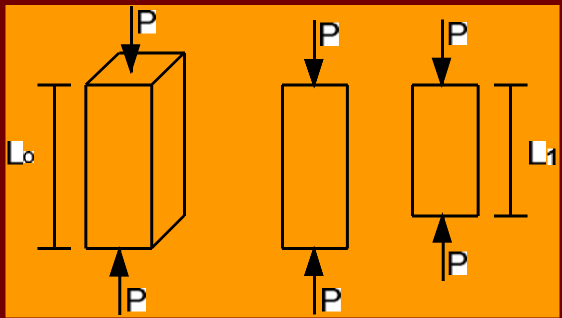
DEFORMASYON VE STRAİN ANALİZİ

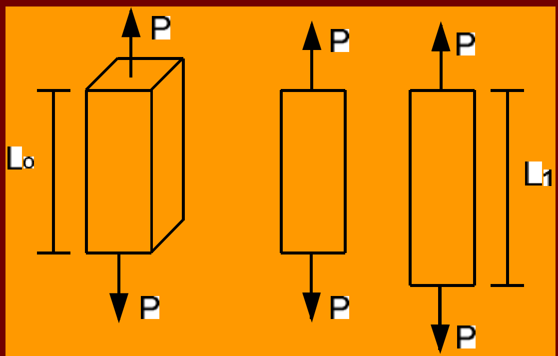
Tek Eksenli Gerilme Koşullarında Deformasyon ve Strain

- Cisimler gerilmelerin etkisi altında kaldıkları zaman şekillerinde bir değişiklik meydana gelir. Bu değişiklik gerilmenin tipine (çekme, basınç ve teğetsel) ve gerilmenin uygulandığı eksenlere göre farklılıklar göstermektedir.



Basınç gerilmesinin etkisi altında cismin boyunda kısalma oluşur. Boydaki değişime **(+) deformasyon** ve boy değişiminin birim uzunluğa düşen miktarına (+) ***Strain*** *(ε - epsilon)* denir.

- Deformasyon, $\Delta L = L_0 - L_1$, (+) Deformasyon
- Strain, $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$, (+) Strain



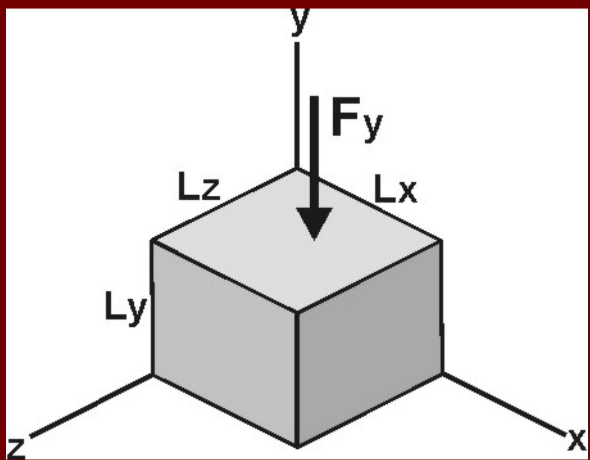
Çekme Gerilmesi etkisi altında cismin boyunda uzama oluşur. Boydaki değişime **(-) deformasyon** ve boy değişiminin birim uzunluğa düşen miktarına (-) ***Strain*** denir.

- Deformasyon, $\Delta L = L_0 - L_1$, (-) Deformasyon
- Strain, $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$, (-) Strain

- Bir çok sert kayaç, sıkışma dayanımı limitleri altında elastik davranış göstererek, uygulanan düşey gerilme altında, yanal (enine) genişleme ve düşey (boyuna) kısalma davranışı gösterirler. Düşey y-ekseni boyunca uygulanan Fy kuvvetinin etkisindeki bir cismi göz önüne alalım. Bu kuvvetin etkisi altında x, y ve z-eksenlerinde oluşacak deformasyonlar ve strainler aşağıdaki eşitlikler ile ifade edilebilir;

$$\sigma_x = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

$$\sigma_y = \frac{F_y}{L_x \cdot L_z}$$



$$\varepsilon_x = \frac{L_x - L_{x'}}{L_x}$$ uzama (-)

$$\varepsilon_y = \frac{L_y - L_{y'}}{L_y}$$ kısalma (+)

$$\varepsilon_z = \frac{L_z - L_{z'}}{L_z}$$ uzama (-)

Young Modülü (Elastisite Modülü)

Mühendislik yapılarının çoğunda uygulanan gerilmeler sonucu oluşacak deformasyon oldukça küçük bir değerde gerçekleşir. Bu deformasyon esnasında gerilme-strain diyagramının başlangıç kısmı olan elastik bölgede gerilme (σ) ve strain (ε) arasında doğru orantıyla açıklanabilen bir ilişki vardır. Lineer elastik malzemeler için;

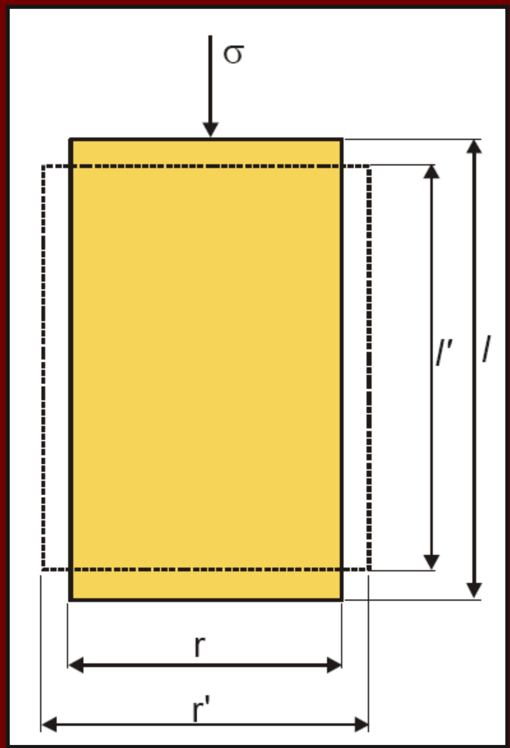
$$\sigma \;\alpha\; \varepsilon \Rightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon$$

Bu ilişki İngiliz matematikçi Robert Hooke (1653-1703) tarafından ortaya konmuştur ve **Hooke Kanunu** olarak bilinmektedir. Buradaki **E** sabiti İngiliz bilim adamı Thomas Young (1773-1829) tarafından ***Elastisite Modülü*** veya ***Young Modülü*** olarak isimlendirilmiştir. E sabiti, mekanik anlamda kayaçların katılığının, ya da sertliğinin bir belirtisidir. Gerilmenin basınç veya çekme olması durumunda elastisite modülünün değeri değişmez. Tek eksenli (z-ekseni boyunca) gerilme koşulları için;

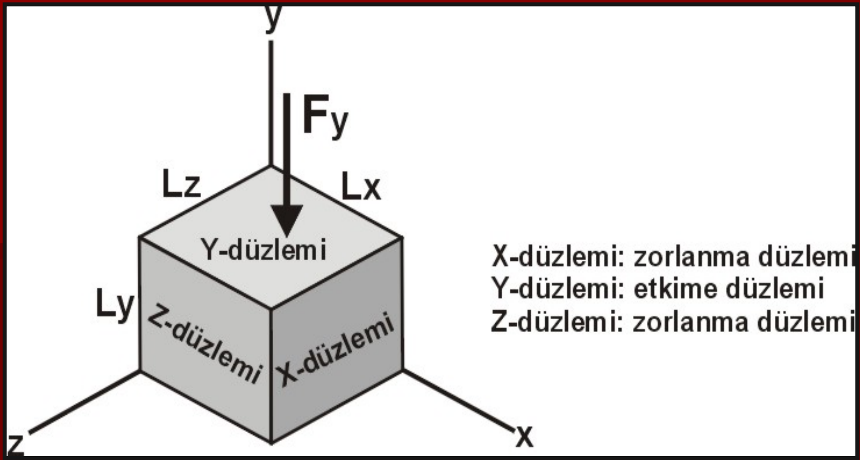
$$E = \text{Young Modülü} = \text{Elastisite Modülü} = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} \;\; \frac{kN}{m^2} \quad \text{(MPa)}$$

Poisson Oranı

Normal gerilmelerin etkisi altında zorlanma düzlemleri içinde oluşan strainin (x- ve z- düzlemleri), etkime doğrultusundaki straine olan oranına ***poisson oranı*** denir ve ʋ(nü) ile belirtilir (birimsiz bir sabittir). Düşey yönde tek eksenli sıkışma koşullarında (y-ekseni);



v=Enine gerinme / Boyuna gerinme = [(r’-r) / r] / [(l’-l) / l]



$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} \Rightarrow \varepsilon_y = -\frac{\varepsilon_x}{\nu} = -\frac{\varepsilon_z}{\nu}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_x = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$$

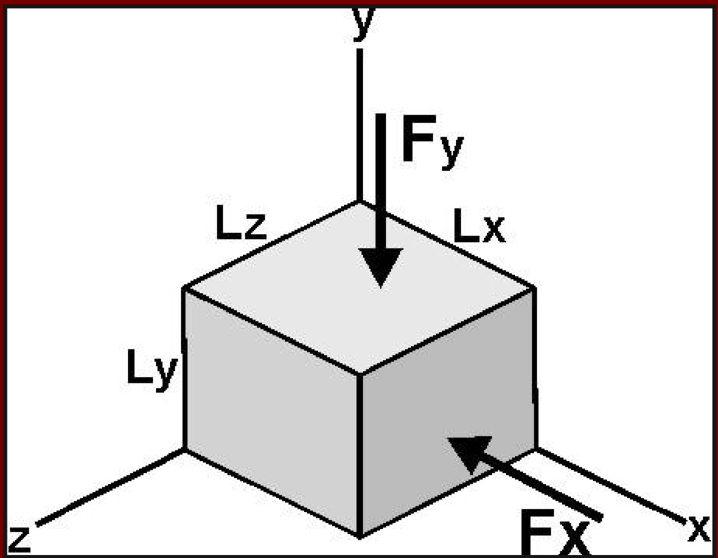
Elastisite modülü ve poisson oranının her ikisi birden ***elastik sabitler*** olarak isimlendirilir. Aşağıdaki çizelgede sert kayaçlar ve çelik için tipik elastik sabit değerleri verilmiştir.

	E (MPa)	ν
Tipik sert kayaçlar	$3.5x10^3$-$105x10^3$	0.15 - 0.30
Çelik	$206x10^3$	0.28

İki Eksenli Gerilme Koşulunda Deformasyon ve Strain

$$\sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_y = \frac{F_y}{L_x \cdot L_z} \quad \sigma_x = \frac{F_x}{L_z \cdot L_y}$$



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu . \sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_z = - \frac{\nu . \sigma_x}{E} - \frac{\nu . \sigma_y}{E}$$

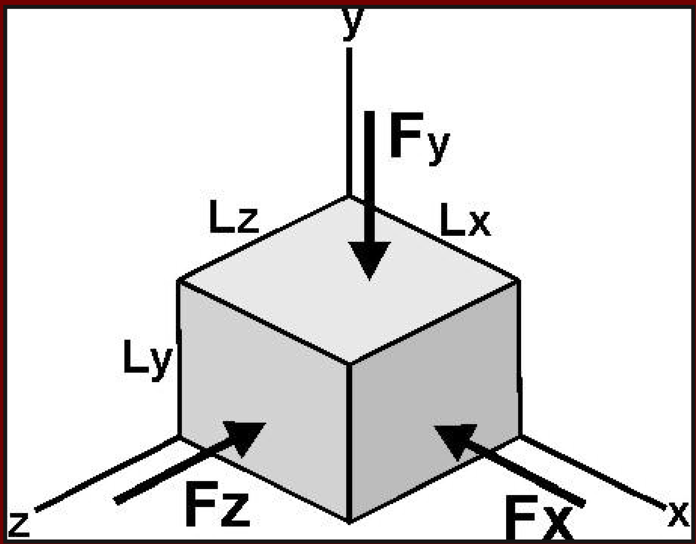
Üç Eksenli Gerilme Koşulunda Deformasyon ve Strain

$\tau = 0$ $\quad \sigma_x \neq 0$ $\quad \sigma_y \neq 0$ $\quad \sigma_z \neq 0$

$$\sigma_x = \frac{F_x}{L_y \cdot L_z}$$

$$\sigma_y = \frac{F_y}{L_x \cdot L_z}$$

$$\sigma_z = \frac{F_z}{L_x \cdot L_y}$$



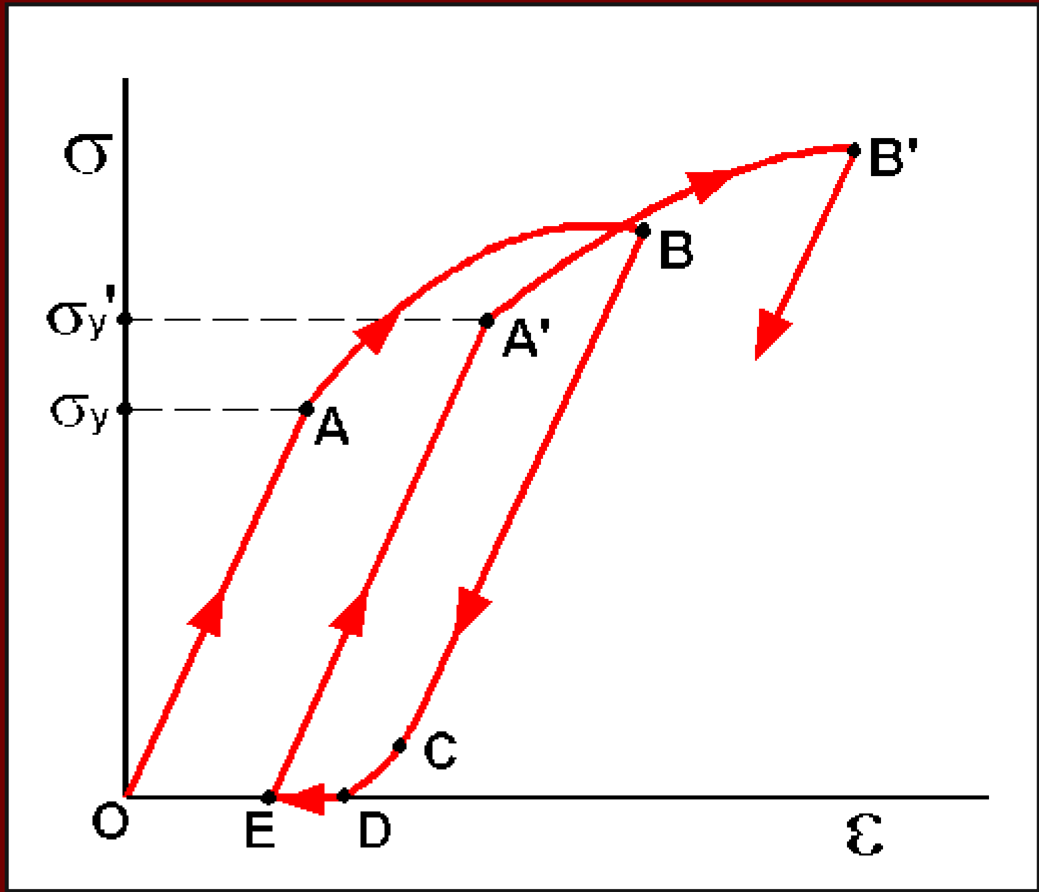
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_y}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu.\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

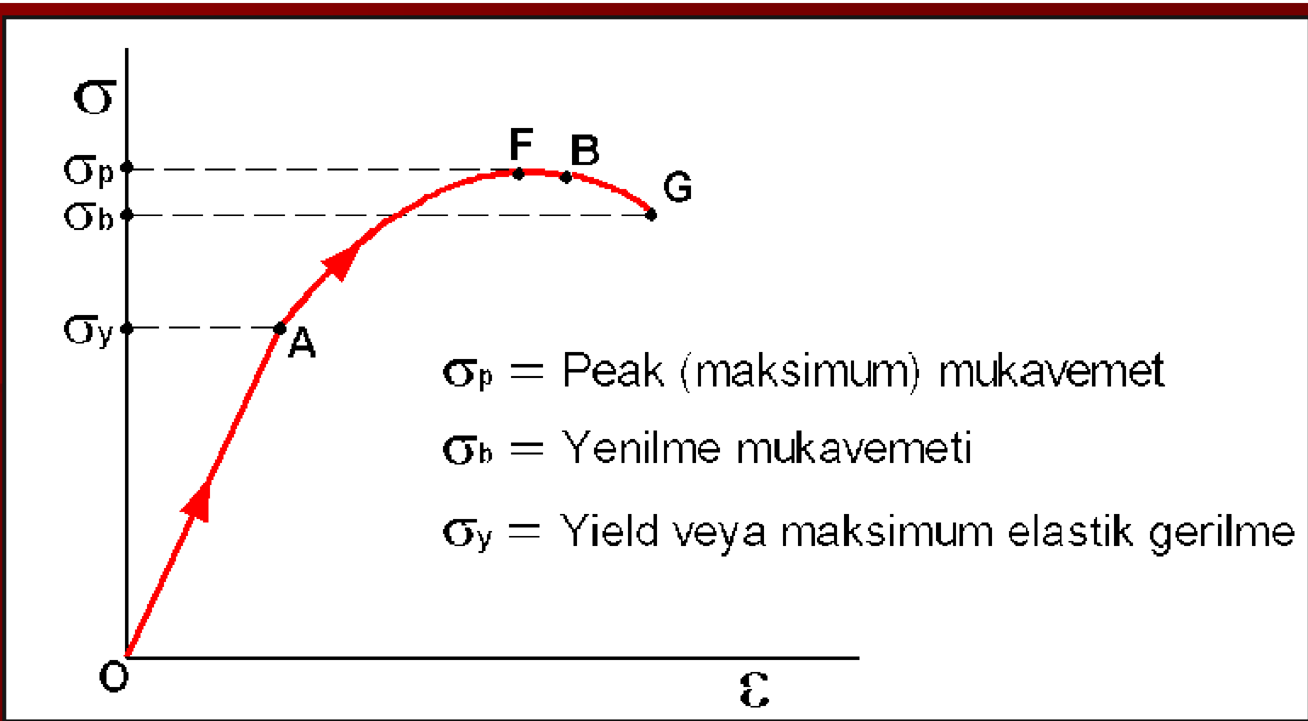
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_x}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu.\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

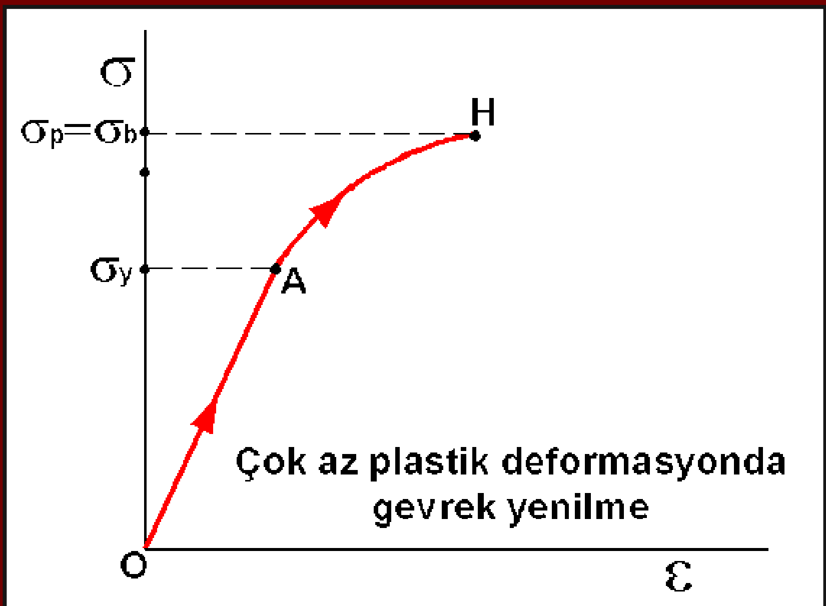
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_x}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_y}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu.\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

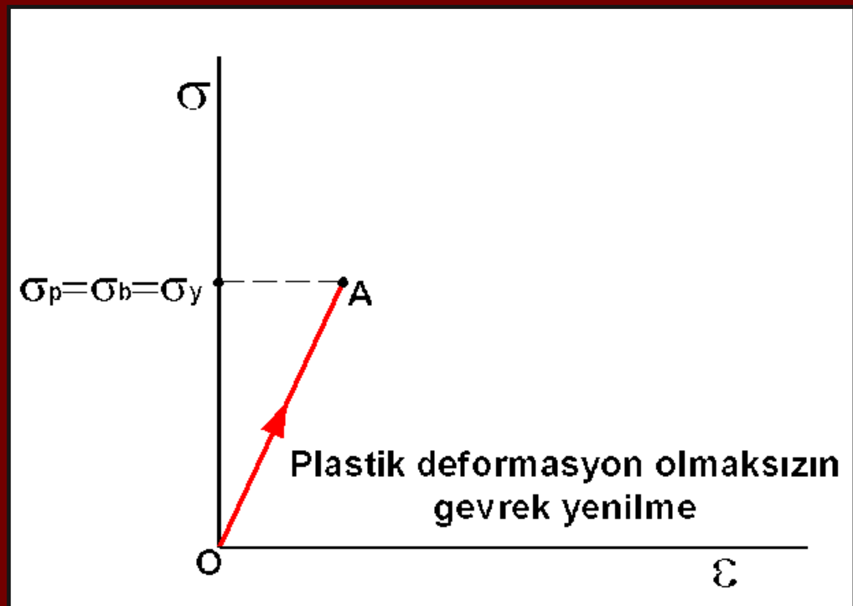
Gevrek ve Sünek Davranış

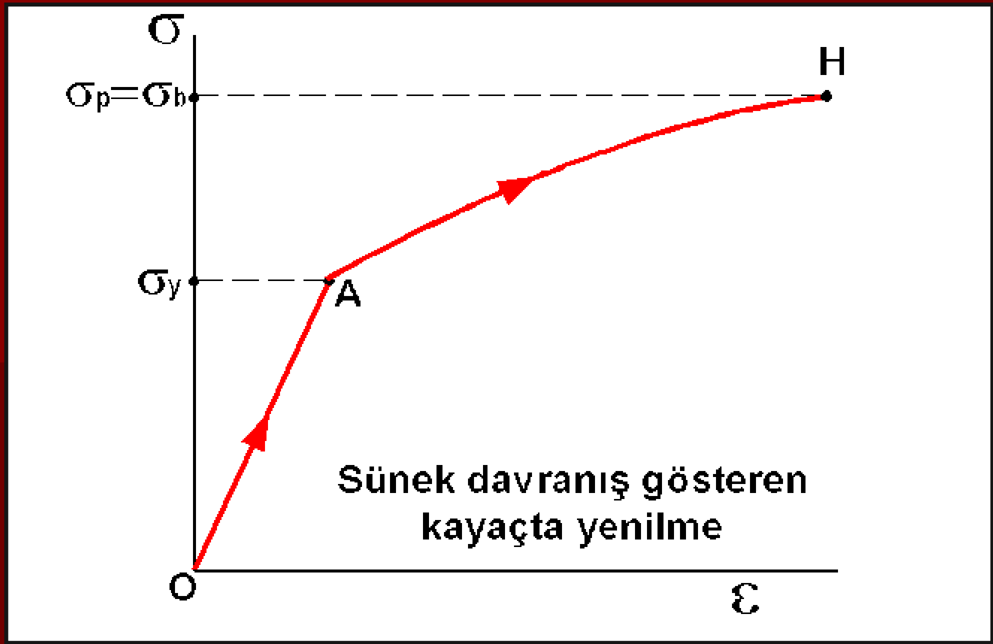
Artan gerilme değerlerine karşılık belirlenen strain değerleri bir grafik üzerinde işaretlenerek **gerilme-strain** ilişkisi elde edilebilir.

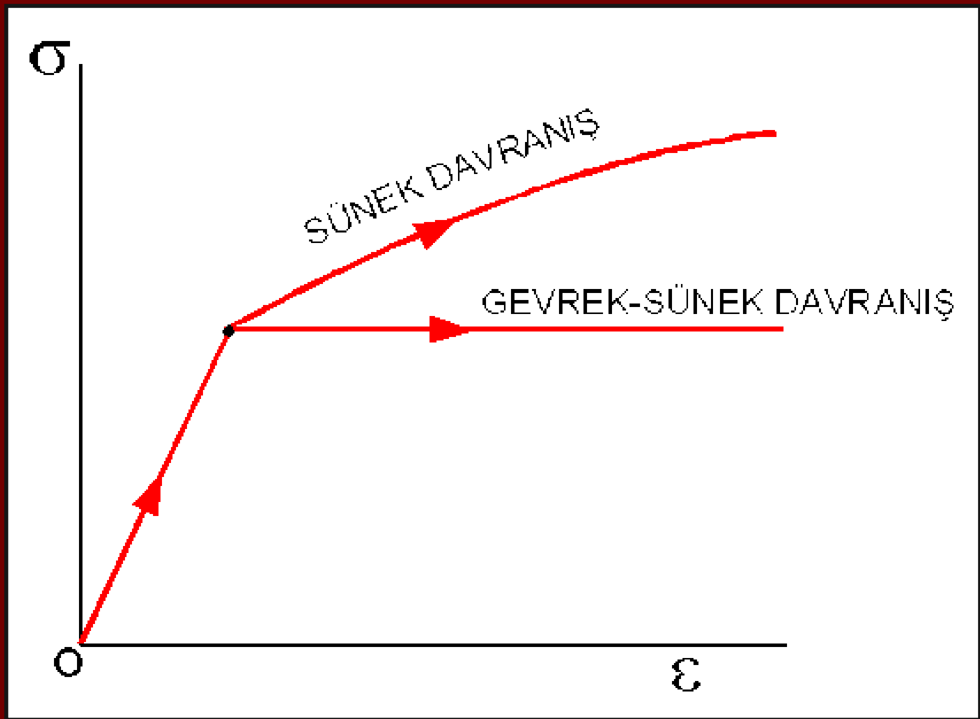


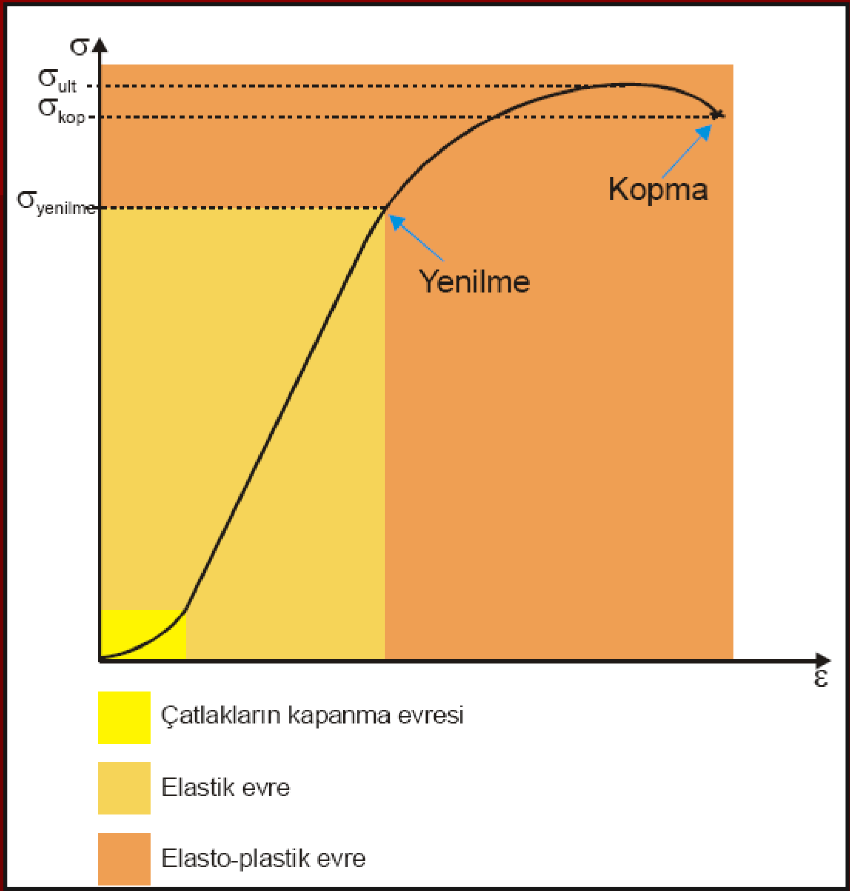

σ
σp
σb
σy
F
B
G
A
O
ε
σp = Peak (maksimum) mukavemet
σb = Yenilme mukavemeti
σy = Yield veya maksimum elastik gerilme

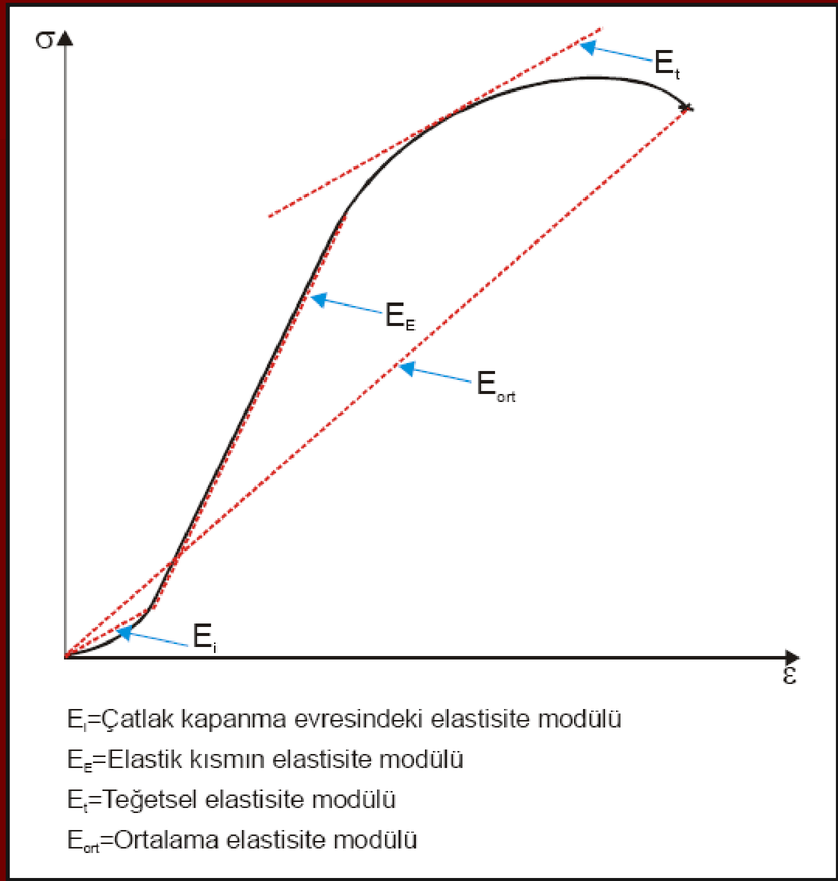

σ
σp=σb
H
σy
A
O
ε
Çok az plastik deformasyonda
gevrek yenilme

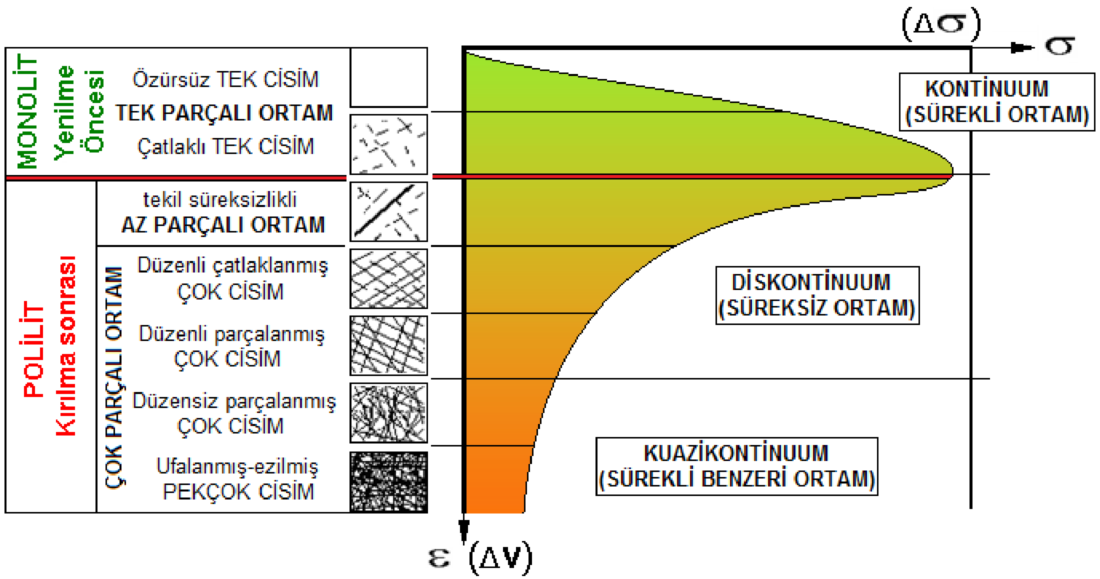

σ
σp=σb=σy
A
O
ε
Plastik deformasyon olmaksızın
gevrek yenilme

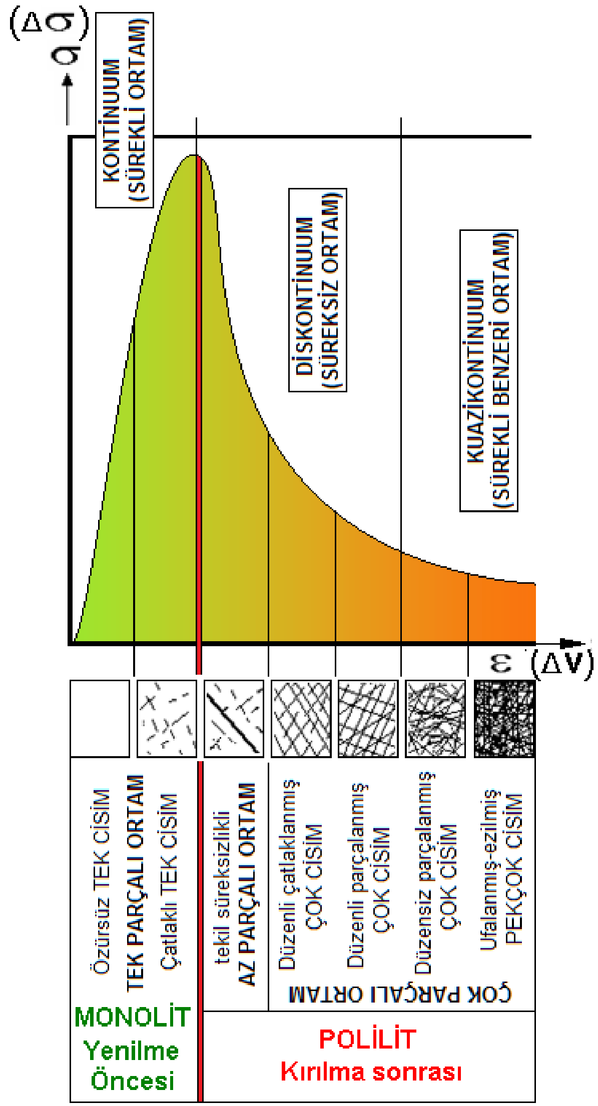

σ
σp=σb
H
σy
A
Sünek davranış gösteren kayaçta yenilme
O
ε


σ
SÜNEK DAVRANIŞ
GEVREK-SÜNEK DAVRANIŞ
O
ε

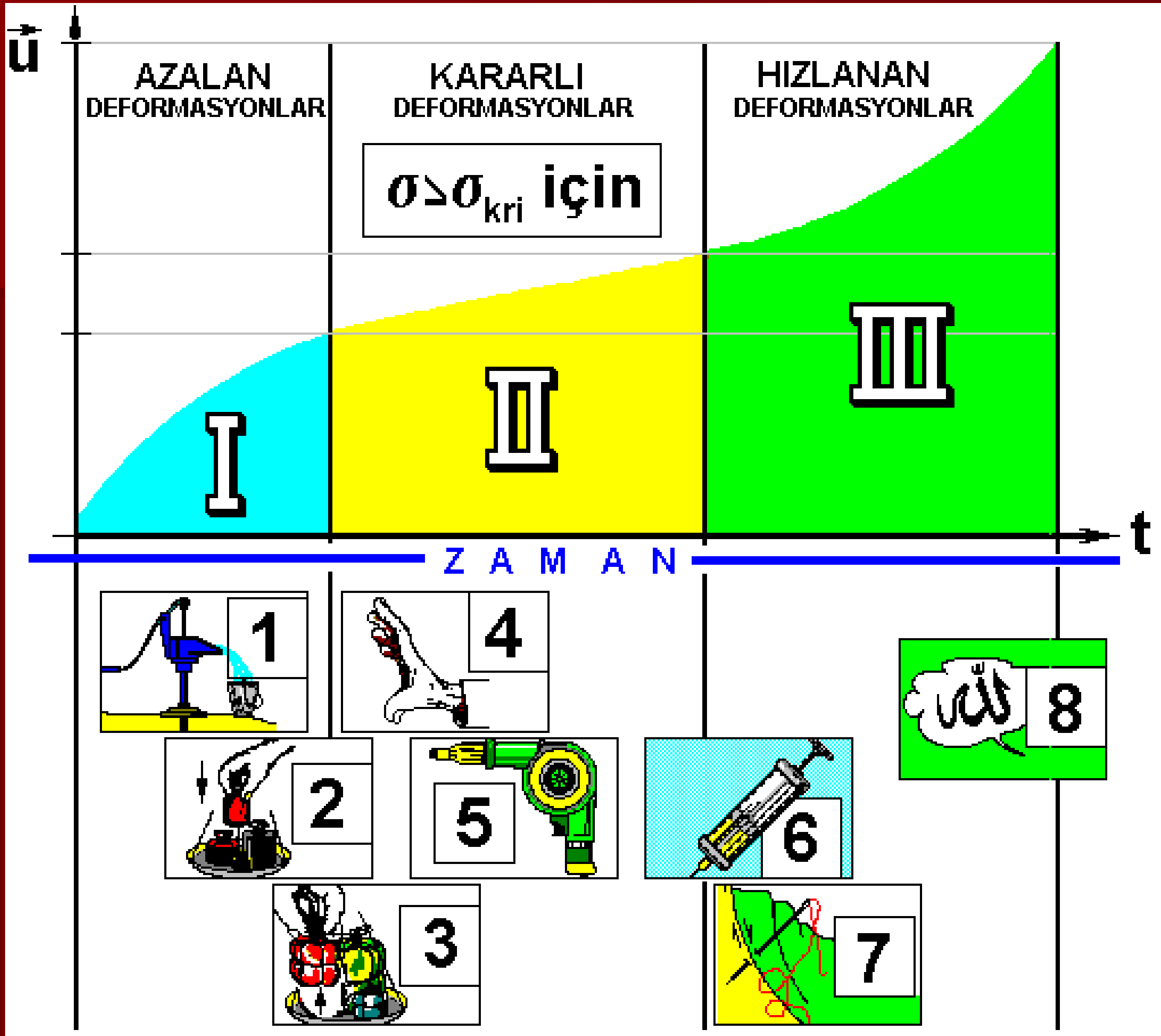

σ
σult
σkop
σyenilme
Kopma
Yenilme
ε
Çatlakların kapanma evresi
Elastik evre
Elasto-plastik evre


σ
Et
EE
Eort
Ei
ε
Ei=Çatlak kapanma evresindeki elastisite modülü
EE=Elastik kısmın elastisite modülü
Et=Teğetsel elastisite modülü
Eort=Ortalama elastisite modülü


MONOLİT
Yenilme Öncesi
Özürsüz TEK CİSİM
TEK PARÇALI ORTAM
Çatlaklı TEK CİSİM
POLİLİT
Kırılma sonrası
ÇOK PARÇALI ORTAM
tekil süreksizlikli
AZ PARÇALI ORTAM
Düzenli çatlaklanmış ÇOK CİSİM
Düzenli parçalanmış ÇOK CİSİM
Düzensiz parçalanmış ÇOK CİSİM
Ufalanmış-ezilmiş PEKÇOK CİSİM
(Δσ) σ
KONTİNUUM (SÜREKLİ ORTAM)
DİSKONTİNUUM (SÜREKSİZ ORTAM)
KUAZİKONTİNUUM (SÜREKLİ BENZERİ ORTAM)
ε (ΔV)

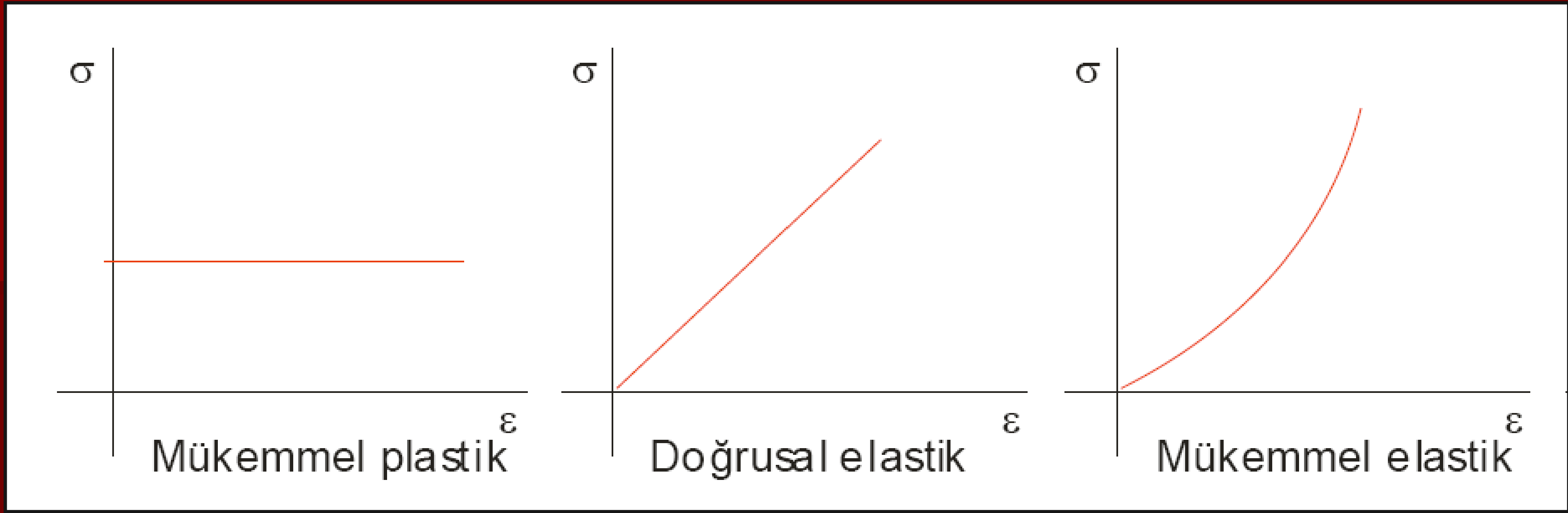

(Δσ) σ
KONTİNUUM (SÜREKLİ ORTAM)
DİSKONTİNUUM (SÜREKSİZ ORTAM)
KUAZİKONTİNUUM (SÜREKLİ BENZERİ ORTAM)
ε (ΔV)
Özürsüz TEK CİSİM
TEK PARÇALI ORTAM
Çatlaklı TEK CİSİM
tekil süreksizlikli
AZ PARÇALI ORTAM
Düzenli çatlaklanmış ÇOK CİSİM
Düzenli parçalanmış ÇOK CİSİM
Düzensiz parçalanmış ÇOK CİSİM
Ufalanmış-ezilmiş PEKÇOK CİSİM
ÇOK PARÇALI ORTAM
MONOLİT
Yenilme Öncesi
POLİLİT
Kırılma sonrası

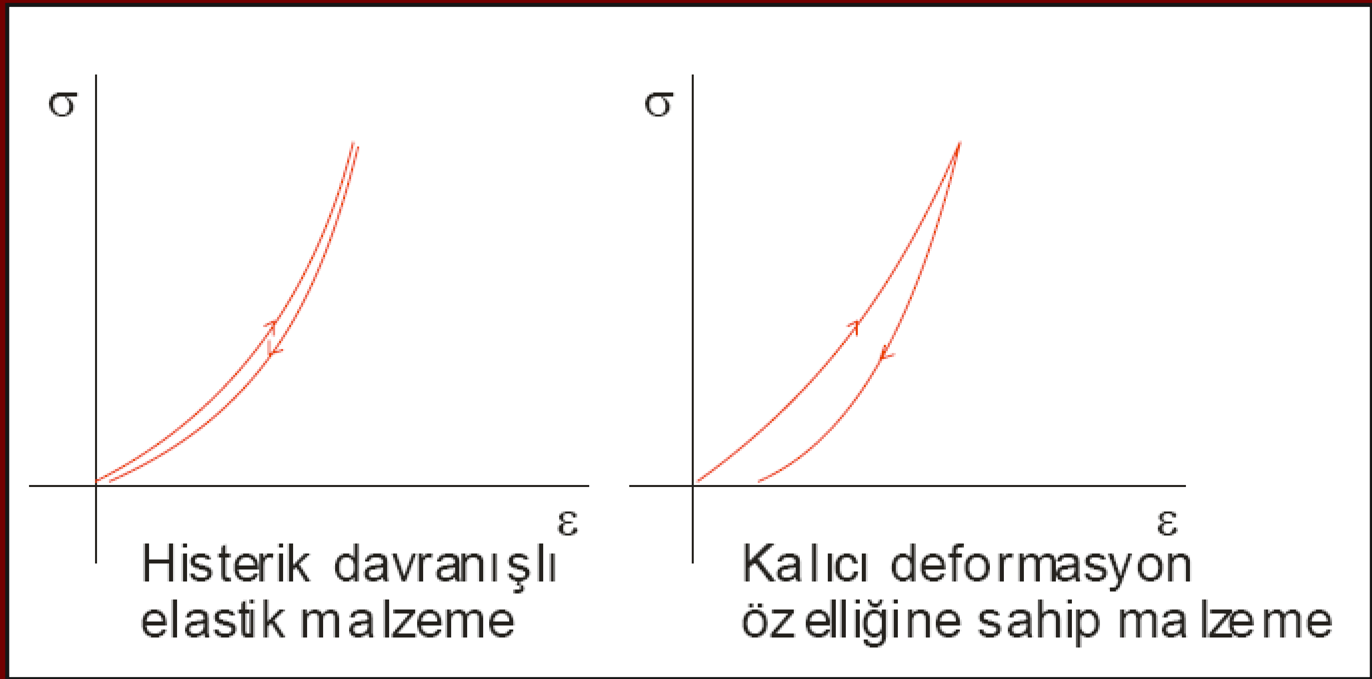
Vardar, 2010



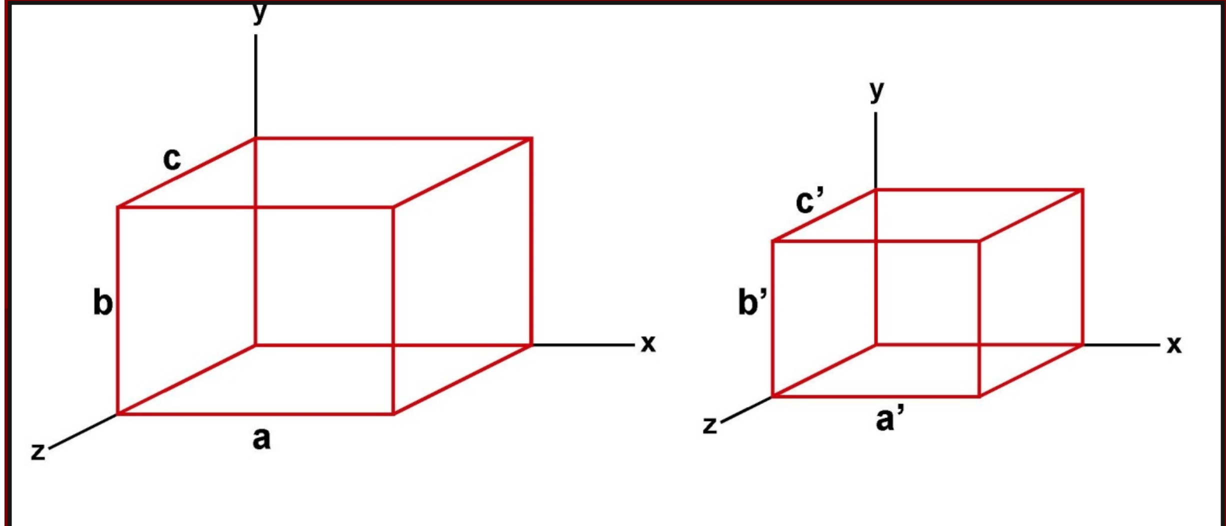
u
AZALAN
DEFORMASYONLAR
KARARLI
DEFORMASYONLAR
HIZLANAN
DEFORMASYONLAR
$\sigma \geq \sigma_{kri}$ için
I
II
III
t
Z A M A N
1
2
3
4
5
6
7
8

Vardar, 2010


σ
ε
Mükemmel plastik
σ
ε
Doğrusal elastik
σ
ε
Mükemmel elastik


σ
ε
Histerik davranışlı
elastik malzeme
σ
ε
Kalıcı deformasyon
özelliğine sahip malzeme

Hacimsel Deformasyon ve Strain



Deformasyon öncesi hacim V=a.b.c

Deformasyon sonrası hacim V'=a'.b'.c'

$$\varepsilon_x = \frac{a - a'}{a} \Rightarrow a' = a\left(1 - \varepsilon_x\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{b - b'}{b} \Rightarrow b' = b\left(1 - \varepsilon_y\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{c - c'}{c} \Rightarrow c' = c\left(1 - \varepsilon_z\right)$$

$$V' = a' \cdot b' \cdot c'$$

$$V' = a \cdot b \cdot c\left(1 - \varepsilon_x\right)\left(1 - \varepsilon_y\right)\left(1 - \varepsilon_z\right)$$

$$V' = a \cdot b \cdot c\left(1 - \varepsilon_x - \varepsilon_y - \varepsilon_z + \ldots\ldots \text{ihmal edilir}\right)$$

Hacimsel Deformasyon $= V - V' = a \cdot b \cdot c - a' \cdot b' \cdot c' = a \cdot b \cdot c - a \cdot b \cdot c\left(1 - \varepsilon_x - \varepsilon_y - \varepsilon_z\right)$

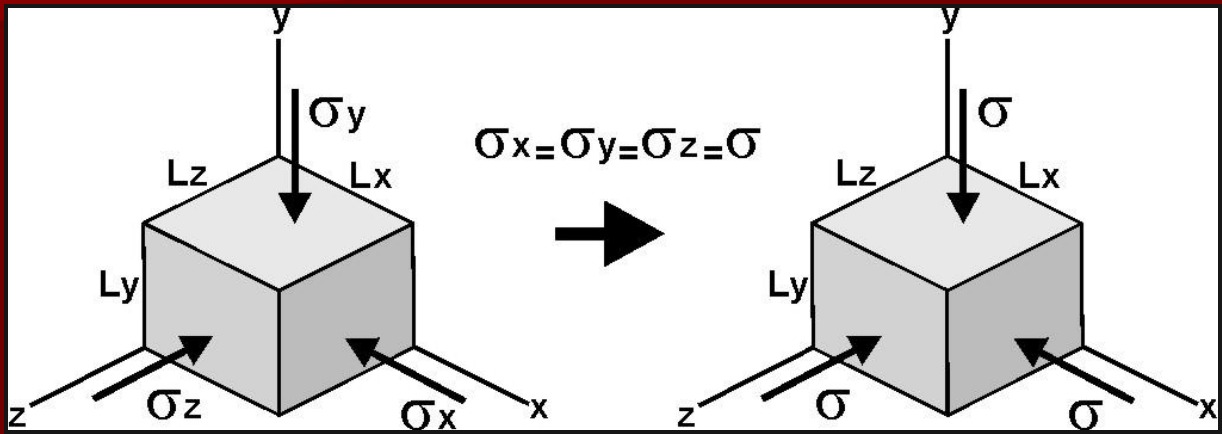
Hacimsel Deformasyon $= a \cdot b \cdot c\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)$

Hacimsel veya Volumetrik strain $= \Delta = \dfrac{\text{Hacimsel Deformasyon}}{\text{Orjinal hacim}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

Hacimsel veya Volumetrik strain $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

Hidrostatik Sıkışma

$\sigma = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \ , \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$



$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{\sigma}{E} - \frac{\nu.\sigma}{E} - \frac{\nu.\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E}\left(1 - 2 \cdot \nu\right)$$

Volumetrik Strain; $$\Delta = 3.\varepsilon = \frac{3\sigma}{E}\left(1 - 2 \cdot \nu\right)$$

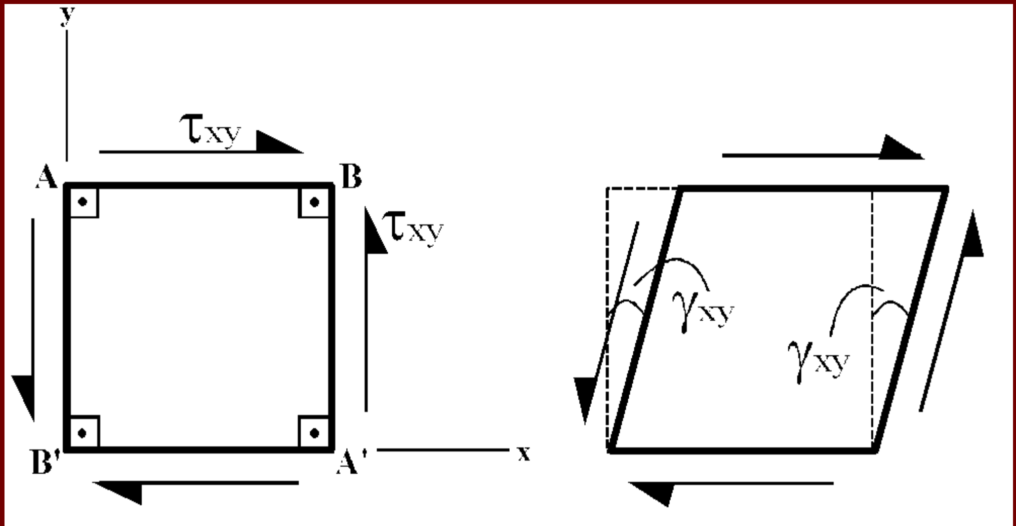
Bulk veya Sıkışma Modülü

- Hidrostatik gerilmeler altındaki cisim için, volumetrik gerilmenin volumetrik straine olan oranı **bulk modülü** veya **sıkışma modülü** olarak isimlendirilir.

$$\left.\begin{array}{l}\text{BULK MODÜLÜ veya}\\ \text{SIKIŞMA MODÜLÜ}\end{array}\right\} = \frac{\text{Volumetrik Gerilme}}{\text{Volumetrik Strain}} = k = \frac{\sigma}{\Delta} = \frac{E}{3\left(1 - 2 \cdot \nu\right)} \quad \text{(MPa)}$$

Makaslama veya Teğetsel Strain

- Teğetsel (makaslama) gerilmenin etkisi altında cismin biçiminde bir açı değişikliği olur. Bu açı değişikliği () başlangıçta dik olan bir açının teğetsel gerilmenin etkisiyle diklikten sapmasını ifade eder. Radyan ile ölçülen bu boyutsuz büyüklük, ancak önceden birbirine dik olan iki doğru parçasının bilinmesiyle bulunabilir.
- Üç ekseni boyunca normal gerilmeler ve teğetsel gerilmelerin etkisi altında kalan bir cisim, deformasyon esnasında köşegenleri boyunca açı değişikliğine uğrarken bir dönmede yapacaktır. Teğetsel strainin hesaplanmasında sadece birbirine komşu iki yüzün (x ve y düzlemleri) göz önüne alınması yeterli olacaktır (sadece $\tau_{yx} = \tau_{xy}$).



$$\hat{A} = \hat{A}' = 90^o = \pi/2 \qquad \hat{A} = \hat{A}' = \pi/2 + \gamma_{xy}$$

$$\hat{B} = \hat{B}' = 90^o = \pi/2 \qquad \hat{B} = \hat{B}' = \pi/2 - \gamma_{xy}$$

$$2\pi \text{ (radyan)} = 360^\circ$$

$$1 \text{ radyan} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Teğetsel strain = γ_{xy} (radyan olarak açıklanır)

Rijidite veya Katılık Modülü

- Cismin teğetsel gerilme dayanımı sınırını aşmayan teğetsel gerilme değerleri ile (homojen izotropik malzeme) oluşacak teğetsel strain arasında bir doğru orantı mevcuttur;

  $\tau \alpha \gamma$ ve bu ilişki elastik sabit olan **rijidite** veya **katılık modülü** adı verilen **G** değeri ile tanımlanır.

Rijidite Modülü = Shear Modülü (MPa) $\tau = G \cdot \gamma \Rightarrow G = \frac{\tau}{\gamma} \cdot \tau$

Elastik Sabitler Arasındaki İlişkiler

- Young Modülü ve Rijidite Modülü arasında aşağıdaki ilişki;

$$G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}$$

Rijidite Modülü = Katılık Modülü (MPa)

1/3 E < G < 1/2 E

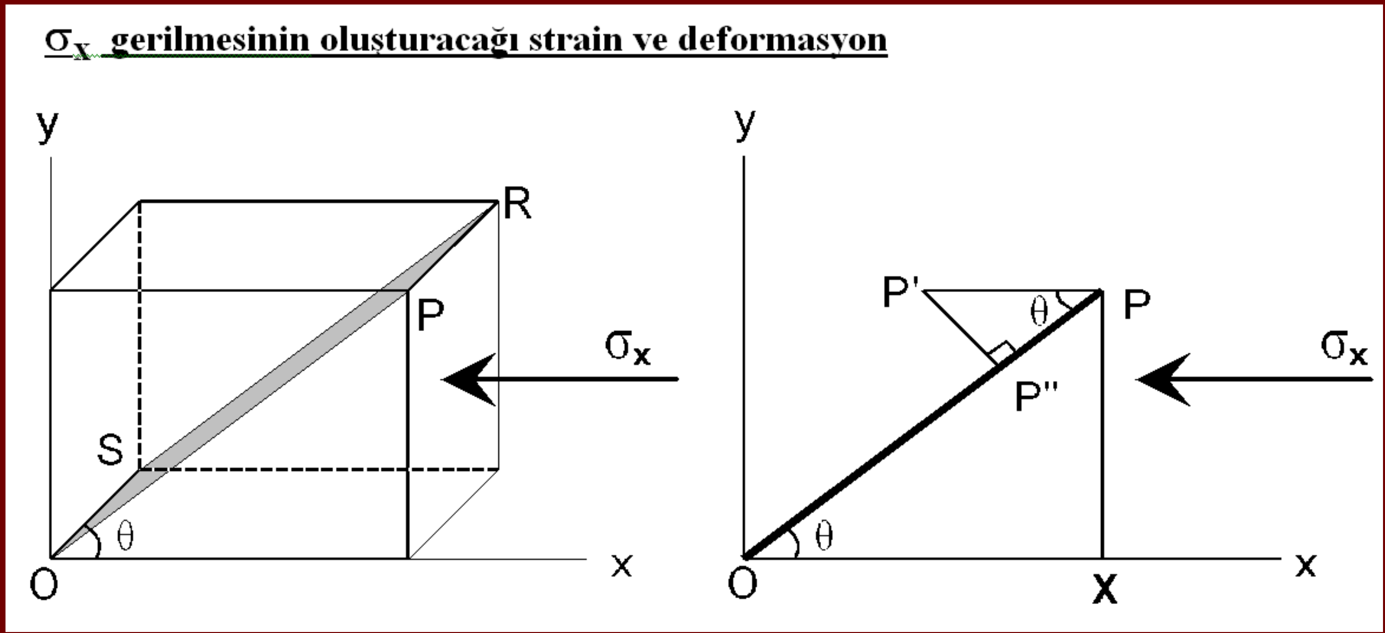
$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_y}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_z}{E} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu \cdot \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_z}{E} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu \cdot \sigma_x}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

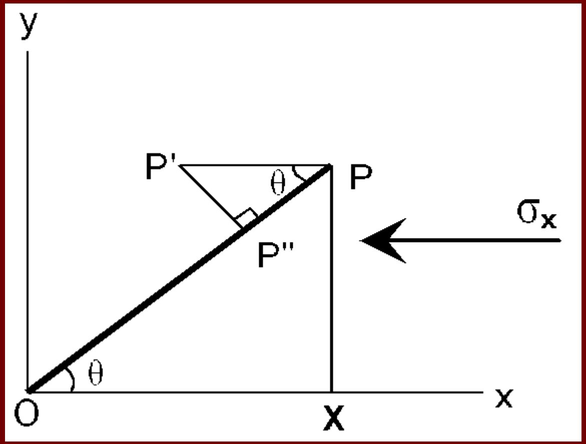
Eğik Bir Düzlemde Strain ve Deformasyonun Hesaplanması

- σ_x ve σ_y gerilmelerinin aşağıdaki şekillerde verilen ve x- ekseni ile θ açısı yaparak köşegenleri birleştiren OPRS düzleminde oluşturacağı strain ve deformasyonun hesaplanması için iki boyutta (xy düzleminde) çözüm mümkündür. Buna göre xy düzlemindeki çözümde sadece OP uzunluğu göz önüne alınarak, deformasyon ve strain OP'ye göre hesaplanır.



PP'= σ_x gerilmesinin x-eksenine paralel olarak oluşturacağı uzunluktaki değişim (deformasyon)
PP''= σ_x gerilmesinin OP düzleminde oluşturacağı uzunluktaki değişim (deformasyon)
ε_x= σ_x gerilmesinin x-eksenine paralel olarak oluşturacağı strain
$\varepsilon_{\theta x}$ = OP düzleminde σ_x gerilmesinin oluşturacağı strain

OPX Büyük üçgenine göre;



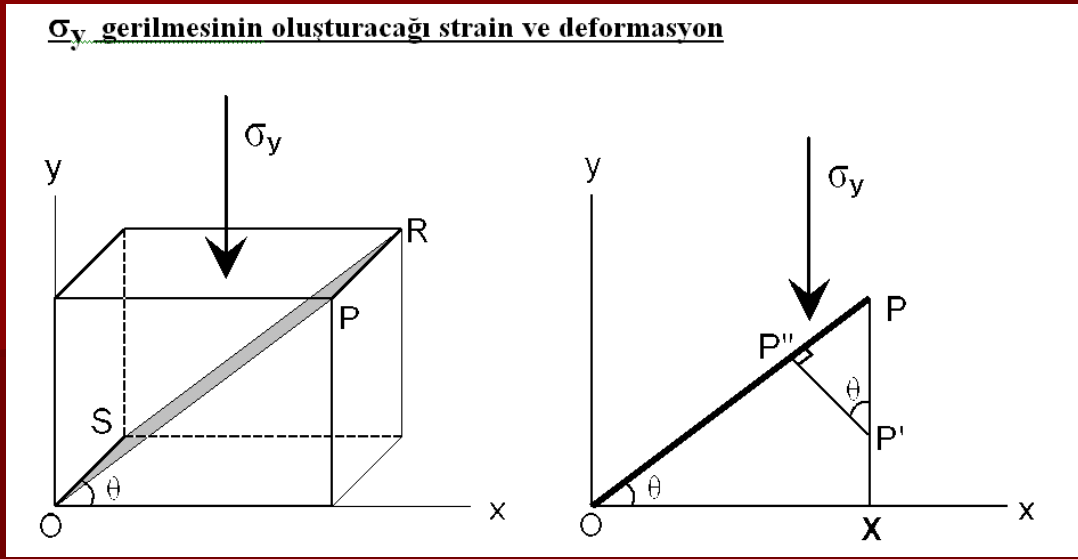
$$\cos\theta = \frac{OX}{OP} \Rightarrow OX = OP \cdot \cos\theta$$

$$\varepsilon_x = \frac{PP'}{OX} \Rightarrow PP' = OX \cdot \varepsilon_x \Rightarrow PP' = OP \cdot \cos\theta \cdot \varepsilon_x$$

PP'P'' Küçük üçgenine göre;

$$\cos\theta = \frac{PP''}{PP'} \Rightarrow PP'' = PP' \cdot \cos\theta \Rightarrow PP'' = OP \cdot \cos^2\theta \cdot \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{\theta x} = \frac{PP''}{OP} = \frac{OP \cdot \cos^2\theta \cdot \varepsilon_x}{OP} \Rightarrow \varepsilon_{\theta x} = \varepsilon_x \cdot \cos^2\theta$$



PP'= σ_y gerilmesinin y-eksenine paralel olarak oluşturacağı uzunluktaki değişim (deformasyon)
PP'= σ_y gerilmesinin OP düzleminde oluşturacağı uzunluktaki değişim (deformasyon)
ε_y= σ_y gerilmesinin y-eksenine paralel olarak oluşturacağı strain
$\varepsilon_{\theta y}$ = OP düzleminde σ_y gerilmesinin oluşturacağı strain

OPX Büyük üçgenine göre;

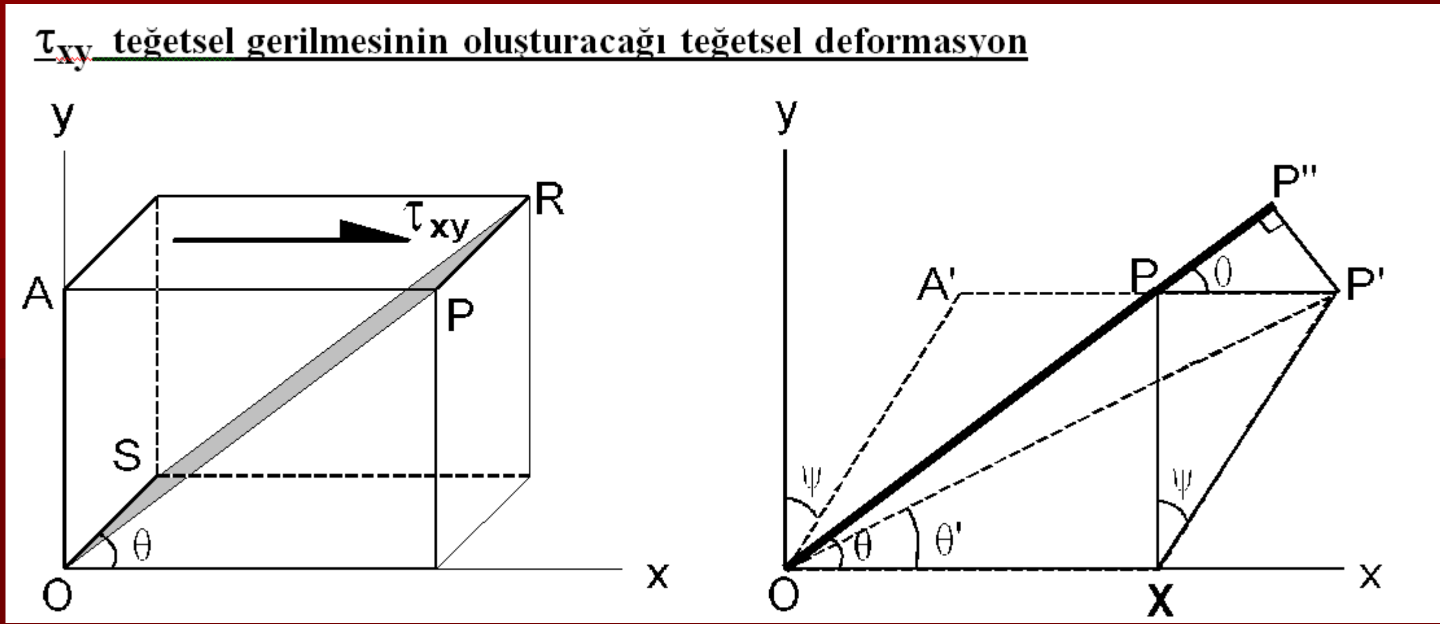
$$\sin\theta = \frac{PX}{OP} \Rightarrow PX = OP \cdot \sin\theta$$

$$\varepsilon_y = \frac{PP'}{PX} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{PP'}{OP \cdot \sin\theta} \Rightarrow PP' = OP \cdot \sin\theta \cdot \varepsilon_y$$

PP'P'' Küçük üçgenine göre;

$$\sin\theta = \frac{PP''}{PP'} \Rightarrow PP'' = PP' \cdot \sin\theta \Rightarrow PP'' = OP \cdot \sin^2\theta \cdot \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{\theta y} = \frac{PP''}{OP} = \frac{OP \cdot \sin^2\theta \cdot \varepsilon_y}{OP} \Rightarrow \varepsilon_{\theta y} = \varepsilon_y \cdot \sin^2\theta$$



OPX Büyük üçgenine göre;

$$\sin\theta = \frac{PX}{OP} \Rightarrow PX = OP \cdot \sin\theta$$

$$\tan\psi = \frac{PP'}{PX} \Rightarrow PX = \frac{PP'}{\tan\psi} \Rightarrow \frac{PP'}{\tan\psi} = OP \cdot \sin\theta \Rightarrow PP' = OP \cdot \sin\theta \cdot \tan\psi$$

$$\gamma_{xy} = \tan\psi$$

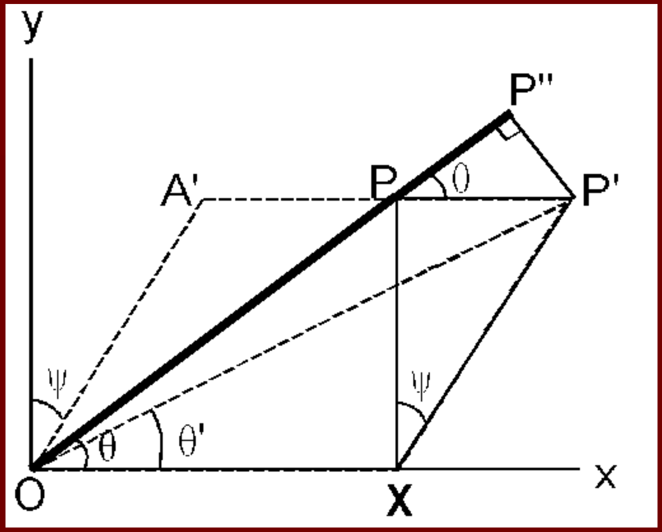
$$PP' = OP \cdot \sin\theta \cdot \gamma_{xy}$$

PP'P" Küçük üçgenine göre;

$$\cos\theta = \frac{PP''}{PP'} \Rightarrow PP'' = PP' \cdot \cos\theta \Rightarrow PP'' = OP \cdot \sin\theta \cdot \gamma_{xy} \cdot \cos\theta$$

$$\varepsilon_{\theta xy} = -\frac{PP'}{OP} \quad \left(\text{OP uzunluğu arttığından, } (-)\right)$$

$$\varepsilon_{\theta xy} = -\frac{OP \cdot \sin\theta \cdot \gamma_{xy} \cdot \cos\theta}{OP} \Rightarrow \varepsilon_{\theta xy} = -\sin\theta \cdot \gamma_{xy} \cdot \cos\theta$$



OP` deki toplam strain

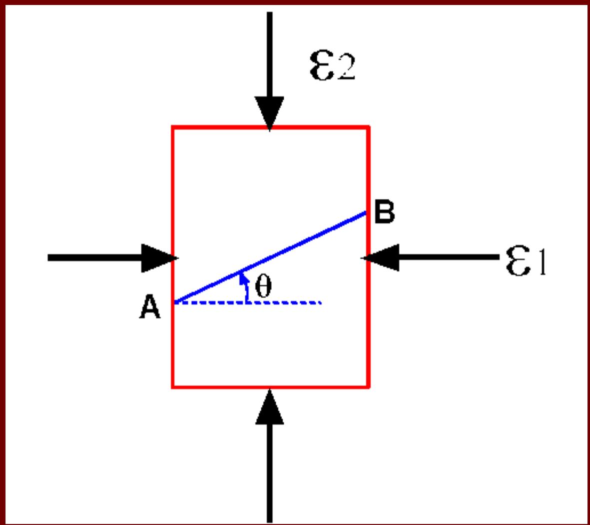
$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta x} + \varepsilon_{\theta y} + \varepsilon_{\theta xy}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{x} \cdot \cos^2\theta + \varepsilon_{y} \cdot \sin^2\theta - \gamma_{xy} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta$$

$$\varepsilon_{\theta} = \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right) + \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)\cos 2\theta - \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

Mohr Dairesi Yöntemi ile Strain Analizi

- Teğetsel strain oluşmadığı zaman, x- ve y- eksenleri boyunca oluşacak strainler asal strainler adını almaktadır ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$). İki asal strain arasındaki açı 90^0 olacaktır.

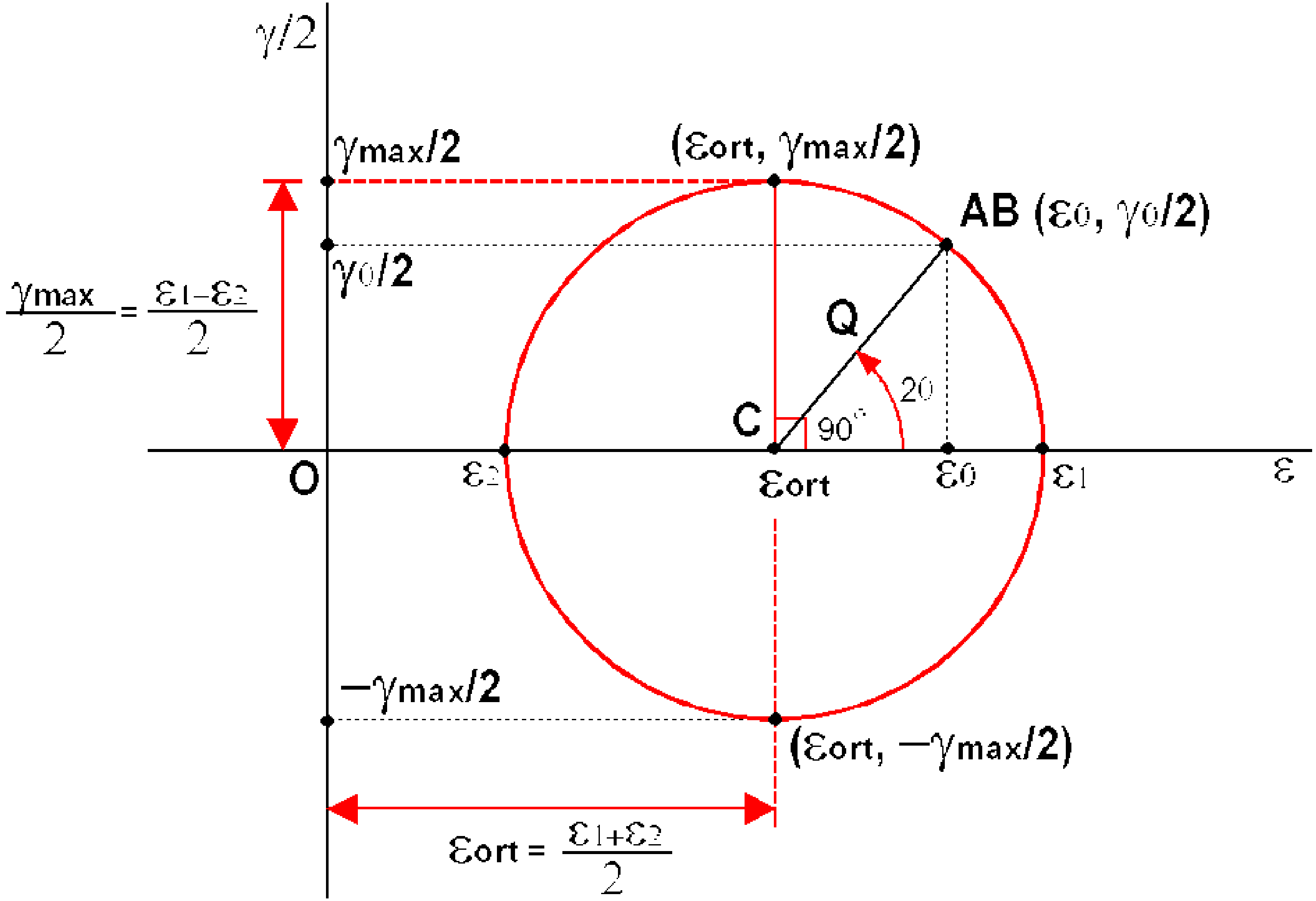


Asal gerilmelerde olduğu gibi, asal starinler de Mohr dairesi yöntemi kullanılarak gösterilebilir. Bu sefer τ-ekseni yerine $\gamma/2$ ve σ-ekseni yerinede ε geçecektir. Buna göre ε_1 straini ile θ açısı yapan AB düzleminde oluşacak strainler hesaplanmak istenirse, aşağıda verilen eşitlikler göz önüne alınacaktır;

$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos 2\theta$$

Daire merkezi P = $\dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$

Daire yarıçapı Q = $\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$ $\qquad \dfrac{\gamma_{max}}{2} = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$

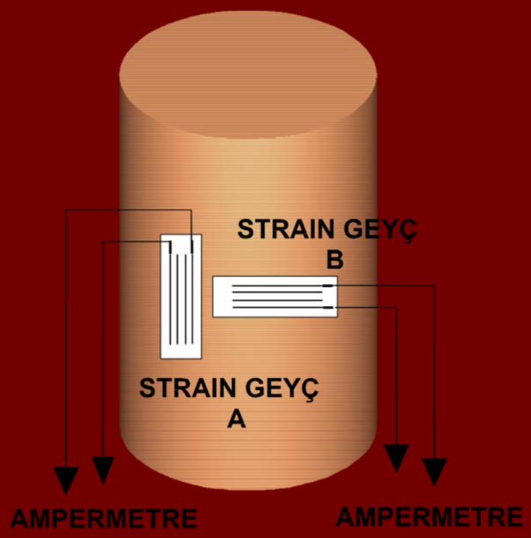


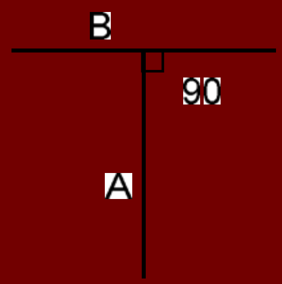
γ/2
γmax/2
(εort, γmax/2)
AB (ε0, γ0/2)
γ0/2
γmax/2 = (ε1−ε2)/2
Q
2θ
C
90°
O
ε2
εort
ε0
ε1
ε
−γmax/2
(εort, −γmax/2)
εort = (ε1+ε2)/2

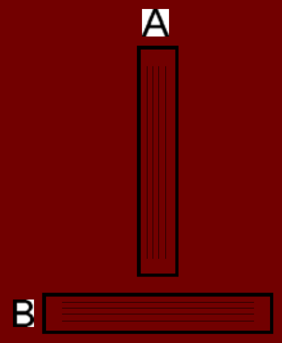
Strainlerin Ölçülmesi

- **90° Strain Rozeti**

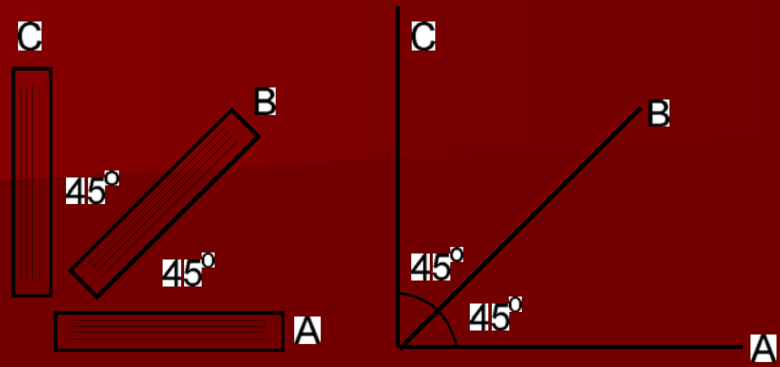
  Sadece A ve B gibi birbirine dik açı yapacak iki geyç kullanılarak ε_1 ve ε_2 hesaplanır. Aşağıdaki şekilde A ve B olarak iki strain geycinin 90° strain rozeti konumunda kaya yüzeyine yerleştirilmeleri görülmektedir.



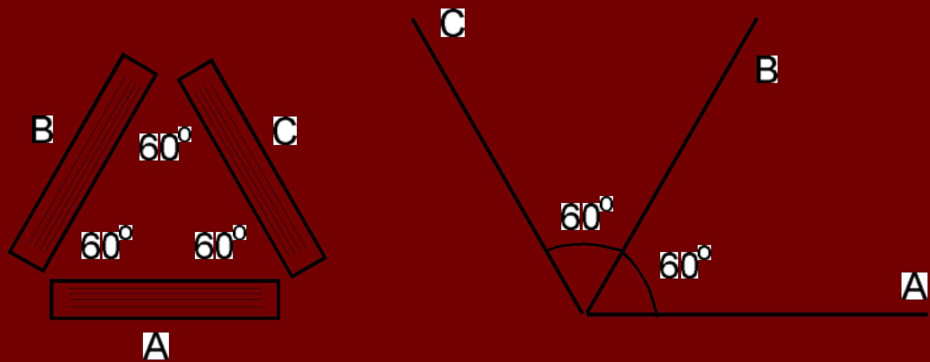




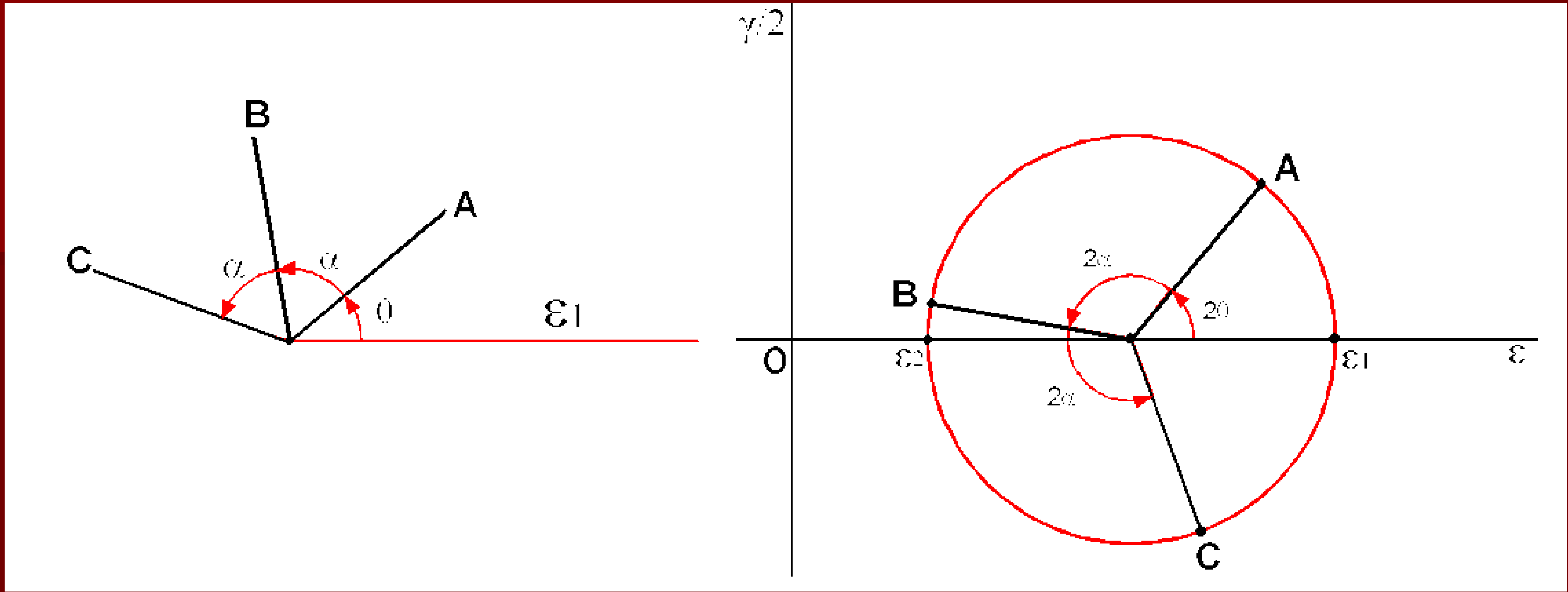
Karga ayağı- 45-45 strain rozeti



Delta rozeti - 60°-60° strain rozeti



Strain Rozetleri için Genel Çözüm



$$\text{Daire merkezi } P = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

$$\text{Daire yarıçapı } Q = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$$

ε_A=A geycindeki strain $A = P + Q.\cos(2\theta)$

ε_B=B geycindeki strain $B = P + Q.\cos(2\theta + 2\alpha)$

ε_C=C geycindeki strain $C = P + Q.\cos(2\theta + 4\alpha)$

$$P + Q = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \quad \Rightarrow \quad P + Q = \varepsilon_1$$

$$P - Q = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \quad \Rightarrow \quad P - Q = \varepsilon_2$$

45°-45°'lik Strain Rozeti için Genel Çözüm

A (ε_A) geycindeki strain $\quad A = P + Q.\cos(2\theta)$

B (ε_B) geycindeki strain $\quad B = P + Q.\cos(2\theta + 90)$

C (ε_C) geycindeki strain $\quad C = P + Q.\cos(2\theta + 180)$

(60) ve (61) nolu eşitlikler tekrar çözülürse;

$$B = P + Q.\left(\cos 2\theta.\cos 90 - \sin 2\theta.\sin 90\right)$$

$$B = P - Q.\sin 2\theta$$

$$C = P + Q.(\cos 2\theta.\cos 180 - \sin 2\theta.\sin 180)$$

$$C = P - Q.\cos 2\theta$$

$$P = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

$$Q = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$$

$$P + Q = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \Rightarrow \quad P + Q = \varepsilon_1$$

$$P - Q = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \Rightarrow \quad P - Q = \varepsilon_2$$

$$A + C = P + Q.\cos(2\theta) + P - Q.\cos(2\theta)$$

$$A + C = 2P$$

$$P = \frac{A + C}{2}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(A - B)^2 + (B - C)^2}$$

60°-60°'lik Strain Rozeti için Genel Çözüm

$$B = P - 0.5.Q.\cos 2\theta + 0.87.Q\sin 2\theta$$

$$C = P + 0.5.Q.\cos 2\theta + 0.87.Q\sin 2\theta$$

$$P = \frac{A + B + C}{3}$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(A - B)^2 + (B - C)^2 + (C - A)^2}$$