Rasgele Sayılar

Simülasyon için rasgele sayılar gerekli !

Bir rasgele sayı üretecinin istenen özellikleri

a) Rasgelelilik (Rasgeleliği sağlaması en önemli koşuldur.)

b) Uzun period (çok uzun çalışan işlerde bile tekrar aynı sayıları çağırmaması gerekir.)

c) **Efektif çalışma (cok fazla bilgisayar zamanı almamalı, ancak çabukluk sağlanırken diğer özellikler kaybedilmemeli.)**

d) **Tekrarlanabilirlik (istendiğinde aynı iş aynı rasgele sayılar ile tekrarlanabilmeli)**

e) **Portatiflik (her türlü işletim sisteminde çalışmalı, bilgisayardan bilgisayara veya işletim sistemleri arasında farklılık göstermemeli.)**

f) **Homojen dağılım (sistematik olarak aynı sayıları çağırmamalı)**

Rasgele Sayı Üreteçleri:

Çoğunlukla Fortran compiler tarafından otomatik olarak gelen generator RAN veya RANF (congruential random number generator)

1) Lineer Congruential Generator:

Aşağıdaki rekürsiyon bağıntısına dayanır.

$$X_{i+1} = (aX_i + c) \bmod m$$

Burada a, b, m integer değerleridir.

Bu üreteç

c> 0 olursa *mixed* LCG(a,c,m)
c=0 olurda *multiplicate* MLCG(a,m) olur

ve sonra (0,1) aralığına normalize edilir.

En çok kullanılan MLCG
A= 16807 = 7^5 ve m= $2^{31}-1$ ile GGL üreteci veya (CONG , RAND) olarak bilinir.

$$X_{i+1} = (16807 X_i) \mathrm{mod} \quad (2^{31}-1)$$

IBM lerde çok kullanılmıştır. (Ancak period düşük) !!!

Bir diğer MLCG (13^{13}, 2^{59})

$X_{i+1} = (13^{13} X_i) \bmod 2^{59}$ **daha uzun period !!**

RANF (iki linear congruential rekürsiyonlu)

$$X_{i+1} = (M_1 X_i) \bmod 2^{48}$$
$$X_{i+64} = (M_{64} X_i) \bmod 2^{48}$$

M_1 **= 44 485 709 377 909**

M_{64}**= 247 908 122 798 849**

Period birçoğundan daha uzun!!

RAND $X_{i+1} = (69069 X_i + 1) \bmod 2^{32}$

2. Lagged (gecikmeli) Fibonacci Generatorleri

$$X_i = (a_1 X_{i-1} + \cdots + a_r X_{i-r}) \bmod m$$

Özel seçimle r=2 ve a1 = a2= 1 seçilirse (Fibonacci generatörü olur)

$$X_i = (X_{i-1} + X_{i-2}) \bmod m$$

3. Shift register (değişmeli sayaç) jeneratorü

$$X_i = X_{i-p} \oplus X_{i-q} \quad .$$

Standart seçimlerle genellikle

$$X_i = X_{i-250} \oplus X_{i-103} \quad .$$

Formunda kullanılır.

4.Kombine Algoritmalılar
RANMAR
İlk stepte Fibonacci generatör

$$X_i = \begin{cases} X_{i-97} - X_{i-33} \ , & \text{if } X_{i-97} \geq X_{i-33} \\ X_{i-97} - X_{i-33} + 1 \ , & \text{otherwise} \ . \end{cases}$$

Ardından aritmetik dizi

$$Y_i = \begin{cases} Y_i - c \ , & \text{if } Y_i \geq c \ , \\ Y_i - c + d \ , & \text{otherwise} \ , \end{cases}$$

c= 7 654 321 / 1677216

d= 16777213 / 16777216

Ve sonra ikisini kombine eder

$$Z_i = \begin{cases} X_i - Y_i \ , & \text{if } X_i \geq Y_i \ , \\ X_i - Y_i + 1 \ , & \text{otherwise} \ . \end{cases}$$

RANMAR in periodu !!! $2^{144} \approx 2.23 \times 10^{43}$ **yüksek istatistikli problemler için son derece uygun**

rmaset.f : başlangıç durumunu set eder.

ranmar.f : her çağırışta bir rasgele sayı üretir.
rmasave.f : son durumu saklar.

Rasgele Sayı Üreteçleri Kalite Kontrolleri:

Birçok şekilde yapılabilir. Çoğunlukla tam çözümü bilinen problemler dikkate alınmaktadır.

10^7 **random sayı ile GGL rekürsiyonu**

$X_{i+1} = (16807 X_i) \bmod \quad (2^{31} - 1)$

“pi”-seed $X_0 = 314159$

$\bar{x} = 0.499795 \approx 1/2$

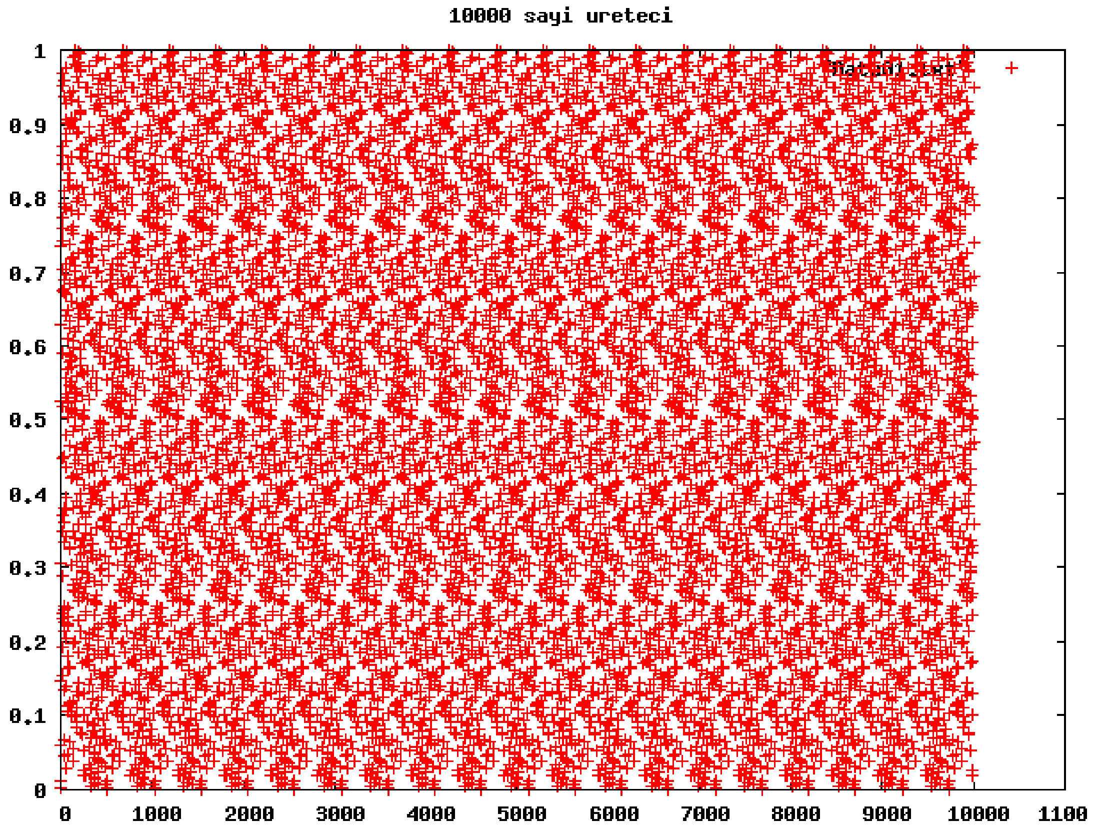
$\sigma^2 = 0.08008 \approx 1/12$

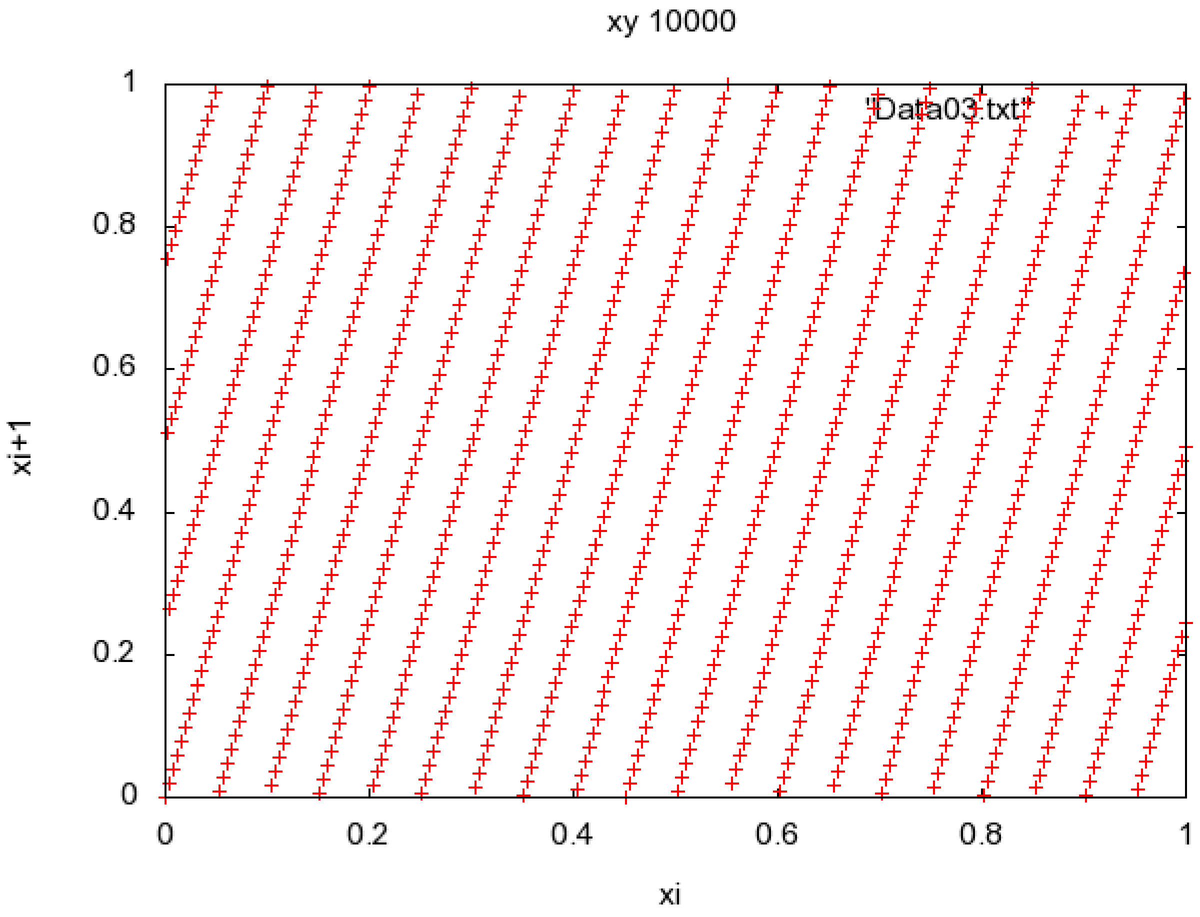
Mesela MLCG generatorunun kötü çalıştığı

$X_{i+1} = (5X_i) \bmod \quad 2^7$ **ve** $X_0 = 1$ **seçilerek açıkça görülebilir.**

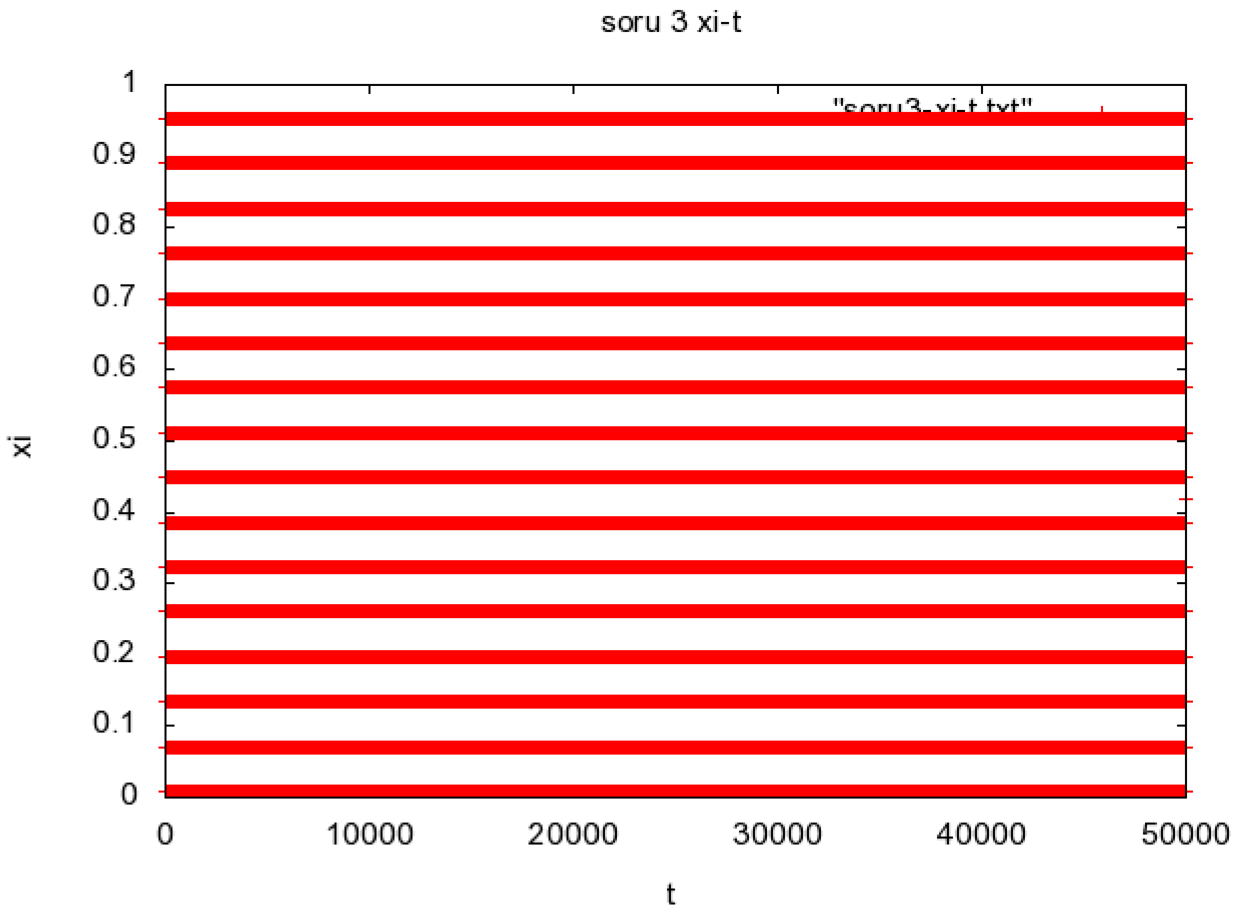
Aşağıda farklı sayı üreteçleri ile elde edilen sayıların dağılımı gösterilmektedir.

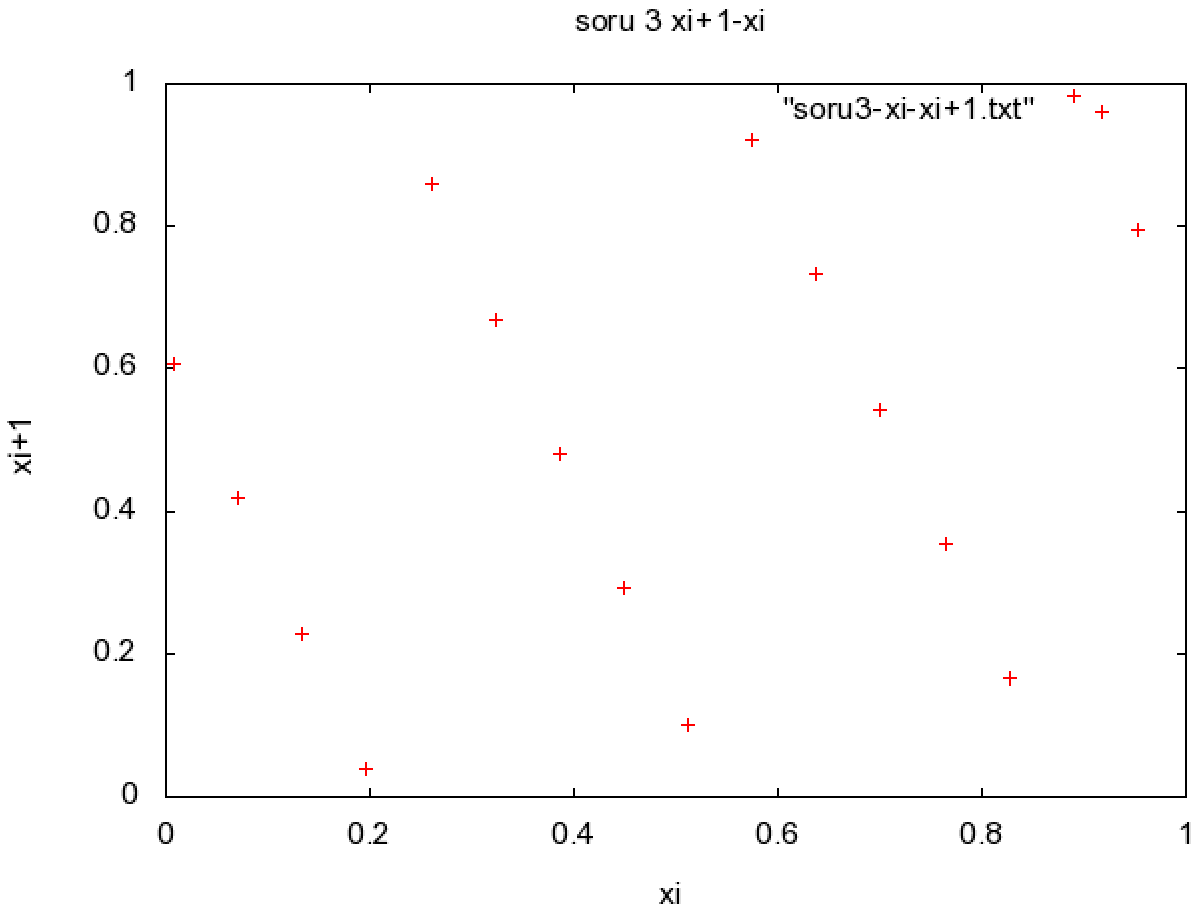
Herbirini yorumlayalım:





xy 10000
"Data03.txt"
xi+1
xi
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


soru 3 xi-t
"soru3-xi-t.txt"
xi
t
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
10000
20000
30000
40000
50000


soru 3 xi+1-xi
"soru3-xi-xi+1.txt"
xi+1
xi
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

UYGULAMALAR:

1) Linear Congruential Generator (LCG)

$$X_{i+1} = (aX_i + c) \bmod m$$

Rekürsiyon bağıntısına göre rasgele sayılar üretmektedir. Optimal olmayan

a= 5 c=0 ve m= 2^{11}=2048 , x_0= 1 değerleri için üreteci hazırlayınız. Normalizayonu (0,1) rasında olmalıdır.

10 ve 10^4 rasgele sayı için zaman serisi çiziniz.

$x = X_i \; ve \; y = X_{i+1} \quad i = 1,3,5...$ olmak üzere iki boyutlu xy grafiğini çiziniz.

2)

10^7 random sayı ile GGL rekürsiyonu

$X_{i+1} = (69069 X_i + 1) \mathrm{mod} \quad (2048)$

“pi”-seed $X_0 = 314159$

Seçerek benzer iki boyutlu grafikleri çiziniz.

3) **MLCG generatorunun**

$X_{i+1} = (5 X_i) \mathrm{mod} \quad 2^7$ **ve** $X_0 = 777$

Çalıştırınız. Onuncu sayıyı not ediniz. Benzer iki boyutlu grafikleri çizerek inceleyiniz.

4) fortran 77 de bulunan **rand()** fonksiyonunu çalıştırarak 10 ve 10^7 rasgele sayı üretiniz. Zaman serilerini çiziniz. Yine iki boyutlu grafiklerini çizerek karşılaştırınız.

Düzgün Dağılım fonksiyonuna uymayan rasgele sayılar:

rasgele sayı üreteçleri (0,1) arasında sayı üretirler.

Ancak bazı uygulamalarda düzgün dağılmayan rasgele sayılara ihtiyaç vardır.

Bu durumda inversion methodu kullanılır.

Normalize olan olasılık yoğunluğu f(x) olmak üzere

$F(x) = \int_{x_{\min}}^{x} dx' f(x')$ **(dağılım fonksiyonu)**

F(x) monoton olarak 0 dan 1 değişir.

Düzgün dağılan rasgele sayılar R ise

$R = F(x)$ **dir.**

O halde $x = F^{-1}(R)$ **yapılırsa buradaki x ‘ler istenen yeni dağılıma uyan sayılar olacaktır.**

Örnek: exponansiyel decay

$$f(x) = \exp(-x)\ , \quad x \geq 0$$

$$R = F(x) = 1 - \exp(-x)$$

$$x = -\ln(1 - R)$$

Run-time hatası $\rightarrow$ $x = -\ln(R)$

Gaussiyen Dağılım:

Olasılık yoğunluğu f(x) = g(x) olmak üzere

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/(2\sigma^2))$$

σ^2 **: varyans**

σ **: Standart sapma**

Gaussian dağılım fonksiyonu

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(x')dx' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sigma} \exp-((x'')^2/2)dx''$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} erf\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Burada $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} \exp-(x')^2 dx'$ **(hata fonksiyonu)**

(bir parça matematik ve polar koordinat dönüşümünden sonra)

$x^r = r^r \cos\phi^r$ **ve** $y^r = r^r \sin\phi^r$

Daha genel olarak

$r^r = \sigma\sqrt{-2\ln(1-u^r)}$ **olur ve** u^r **(0,1) arasında üretilen rasgele**

sayılardır.