# Fonksiyonlar ve Beklenen Değerler

Bir fonksiyonun beklenen değeri:

$$\hat{\phi} = \langle \phi^r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x) dx$$

Olarak verilir. Momentleri ise

$$\lambda_n = \hat{x}^n = \langle (x^r)^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$\hat{x}^n$ n. momenti olarak tanımlanır. Bir niceliğin birinci momenti o niceliğin beklenen değeridir. Ya da genel anlamda “ortalama” değer olarak tanımlarız.

İndirgenmiş momenti (reduced moment) ise

$$\mu_n = \left\langle (x^r - \hat{x})^n \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \hat{x})^n f(x) dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

olarak verilir.

İndirgenmiş 2. moment $\mu_2$ (varyans)

$$\mu_2 = \sigma_x^2 = \sigma^2(x^r)$$

Karekökü ise ( standart sapma)

$$\sigma = \sigma_x = \sigma_x(x^r) = \sqrt{\sigma^2(x^r)}$$

olarak verilir. Bu istatistiksel hesaplarda coğu zaman istatistiksel hata ya da error bar olarak adlandırılır.

Momentlere Örnekler:

(1) Düzgün dağılım için momentler ve indirgenmiş momentler

$$\hat{x}^n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

ve $\hat{x} = 0.5$ ve varyans değeri de $\sigma^2 = 1/12$

(2) Normal dağılımının beklenen değeri veya “mean” ( ortalama) değeri $\hat{x}=0$. Momentleri ise

$$\hat{x}^n = \mu_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) = \frac{(\sigma\sqrt{2})^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{n+1}{2})$$

(3) Cauchy dağılımı için momentler tanımsızdır. Yavaş fonksiyonel düşüşten dolayı.

(4) Binom dağılımı için $\sigma^2 = pq \qquad ve \qquad \hat{x} = p$

Genel olarak istatistiksel örneklemede N tane örnekleme yapıldıysa bir fiziksel niceliğin beklenen değeri

$$\hat{x}^n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^n$$

Bu durumda n=1 alındığında bu aritmetik ortalamaya dönüşmektedir.

$$\hat{x}^r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^r$$

# Hata Analizi

Birçok  uygulamada fiziksel niceliklerin beklenen değerlerini hesaplamak isteriz. Eğer yeteri kadar örnekleme yapılmış ise fiziksel niceliğin beklenen değeri yani aritmetik ortalaması normal dağılım göstermektedir.

Hata için bu sebeple fizikçiler arasında ilk ele alınan  ortalama değerin standart sapmasıdır.

$$\sigma = \sigma(\hat{x}^r) \qquad \hat{x}^r = \sum_{i=1}^{N} x_i^r$$

Yani birçok durumda

$\hat{x} = \overline{x} \pm \Delta\overline{x}$ olarak alınır ve $\Delta\overline{x}$ standard sapma ile ilişkilidir.

Bir takım işlemler sonucunda

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i^r - \overline{x}^r)^2$$

olduğu görülecektir.

Fizikte bazen farklı hassasiyette ölçülmüş gözlemlere rastlarız. Diyelim ki bu ölçümlerin ağırlıkları biliniyor. Bu ne demektir her farklı grup N tane ölçüm içeriyor, aynı olasılık yoğunluğuna sahip ancak farklı deney grupları tarafından ölçülmüş. Bu durumda bir fiziksel niceliğin ortalama değeri

$$\overline{x}^r = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \overline{x}_i^r \qquad \sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1 \quad olmak\ üzere$$

hesaplanabilir.

Bir önceki durumda ağırlıklar eşitti, $\omega_i = \frac{1}{N}$ ve $\overline{x}_i^r = x_i^r$ idi.
Şimdi ise

$$\overline{x}_i^r = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} x_j^r \quad ve \qquad \omega_i = \frac{N_i}{\sum_{i=1}^{N} N_i}$$

ve standart sapma da

$$\sigma = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\omega_i(\overline{x}_i^r - \overline{x}^r)^2$$

UYGULAMA

1) Linear Congruential Generator (LCG)

$$X_{i+1} = (aX_i + c) \bmod m$$

Rekürsiyon bağıntısına göre rasgele sayılar üretmektedir. Optimal olmayan

a= 5 c=0 ve m= $2^{11}$=2048 , $X_0$= 1 değerleri için üreteci hazırlayınız. Normalizayonu (0,1) arasında olmalıdır.

N=10 , 100, 10000, $10^6$ sayı üreterek sayıların ortalama değerini ve varyansını hesaplayınız.