BENZERLİK BOYUTU

Koch Eğrisi, Sierpinski Şapkası gibi kendine-benzer fraktallar için kutu ölçüleri, Koch Eğrisinin ölçek çarpanının kuvvetleri ⅓, şapkanın ise ½ olarak alındığında kutu-sayma boyutlarının hesabı kolaydır. Önceki kısımda, şapkanın kenar uzunluğu $1/_{2^n}$ olan 3^n tane kutu ile örtülebileceğini ve dolayısıyla kutu-sayma boyutunun hesabının da

$$d_b = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 3^n}{\log 1/_{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \log 3}{n \log 2} = \frac{\log 3}{\log 2}$$

olduğunu görmüştük.

n’ in sadeleştiğine dikkat edin. Bu bir tesadüf değildir, kendine-benzerlik ölçeğinin bir sonucudur. Bunu vurgulamak, ve kendine-benzer bir şeklin boyut hesabına kısa bir yol vermek için, benzerlik boyutunu tanımlayalım.

Kendisinin N kopyasından oluşmuş her biri r küçültme çarpanlı benzerlik ölçeğine sahip bir kendine-benzer şekil için benzerlik boyutu

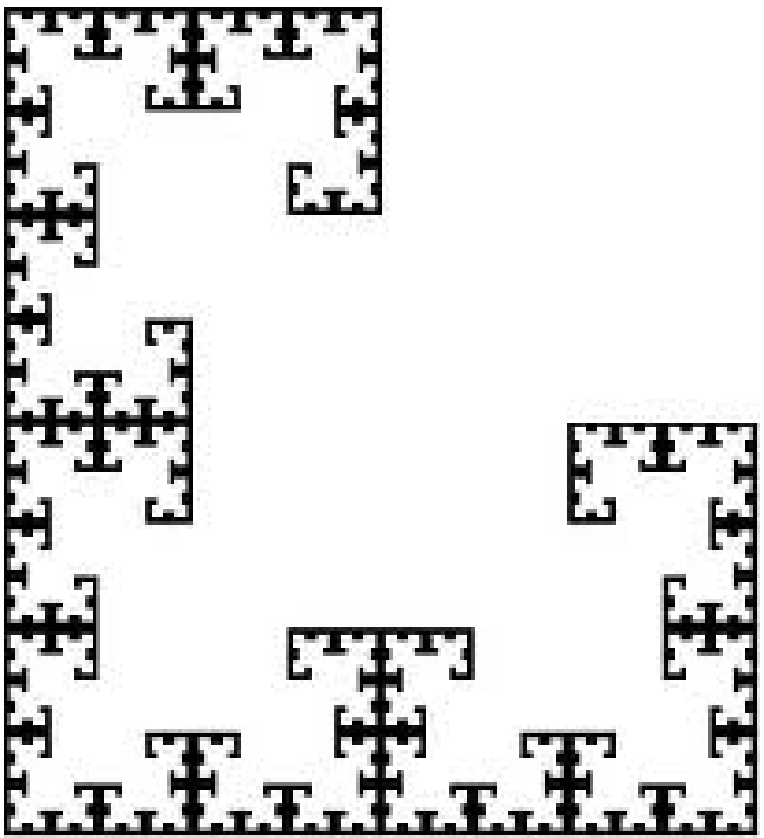
$$d_b = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})}$$

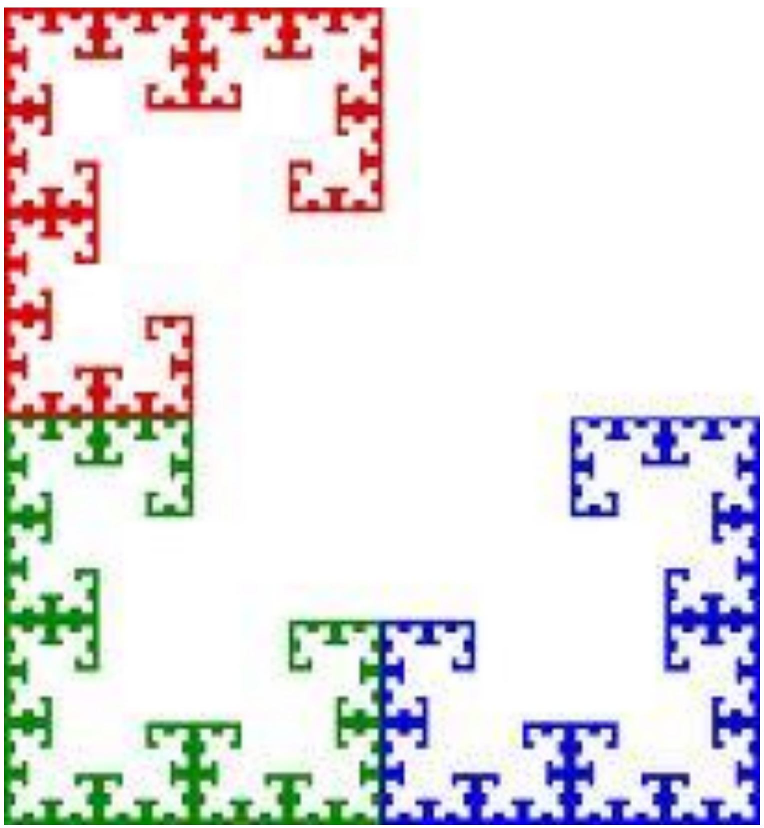
dir. Bu formül farklı parçalar farklı küçültme çarpanlı benzerlik ölçeğine sahip olma hali için de genelleştirilebilir.

Daha genel olan formül **MORAN DENKLEMİ** adı verilen formüldür. Benzerlik boyutu kutu-sayma boyutuna eşittir. Peki neden benzerlik boyutu vardır? Benzerlik boyutunun hesabı kutu-sayma boyutundan daha kolaydır, ama unutmayalım ki benzerlik boyutu sadece kendine-benzer şekiller için vardır (Parçaları farklı yönlerde farklı ölçeklere sahip olan self-afin şekiller için bazı genellemeler vardır, ancak onlar çok daha karmaşıktırlar).

d_b yi bulmak için şekli kendisinin daha küçük parçalarına bölüp, bu parçalar için küçültme çarpanını buluruz. Bunu örneklerle açıklayalım:

ÖRNEK-1: Bir sonraki slayttaki şekilde, soldaki (siyah) fraktalın benzerlik boyutunu bulalım.





Şekil her biri r= ½ ölçekli kendine benzer n=3 eşit parçaya bölünebilir (Sağdaki renkli fraktal).

$r_0 = 1 \Rightarrow N(r_0) = 1$

$r_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow N(r_1) = 3$

$r_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow N(r_2) = 9 = 3^2$

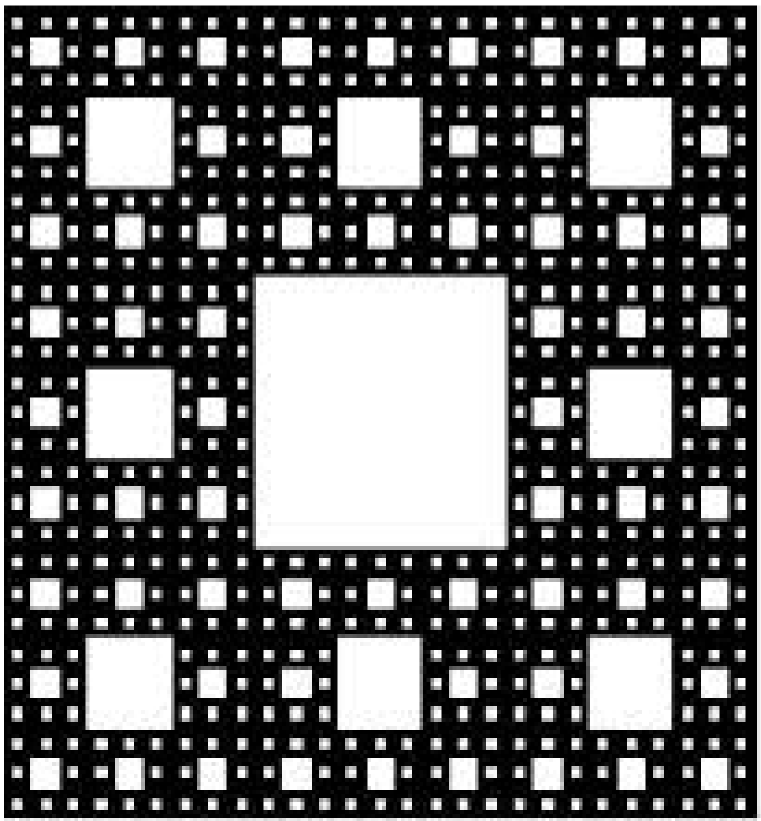
$r_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow N(r_n) = 3^n$

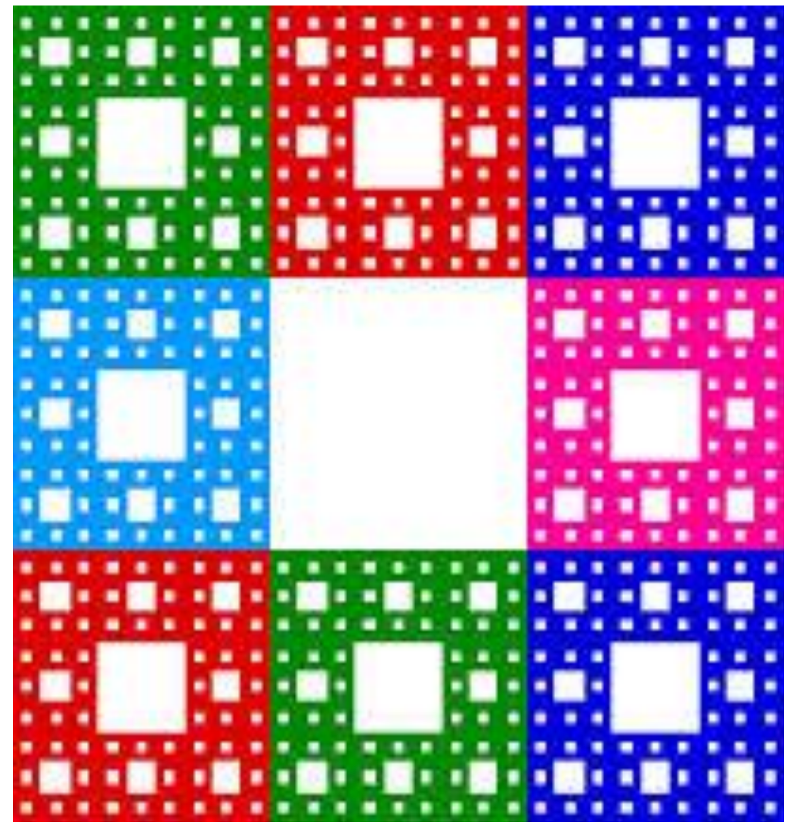
$$d_b = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N(r_n)}{\log(\frac{1}{r_n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 3^n}{\log\frac{1}{\frac{1}{2^n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{nlog}\, 3}{n \log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} \cong 1.584962501$$

Bu fraktal ile Sierpinski Şapkası aynı benzerlik boyutuna sahiptirler. Tabiki boyut kavramı bir fraktalı diğerinden ayırt etmeye yeterli değildir.

ÖRNEK-2: Bir sonraki slayttaki şekilde, soldaki (siyah) fraktalın benzerlik boyutunu bulalım.





Sağdaki renkli şekilde de görüldüğü gibi, fraktalımızı her biri r=⅓ ölçekli kendine benzer n=8 parçaya bölebiliriz.

$$r_0 = 1 \Rightarrow N(r_0) = 1$$

$$r_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow N(r_1) = 8$$

$$r_2 = \frac{1}{9} \Rightarrow N(r_2) = 64 = 8^2$$

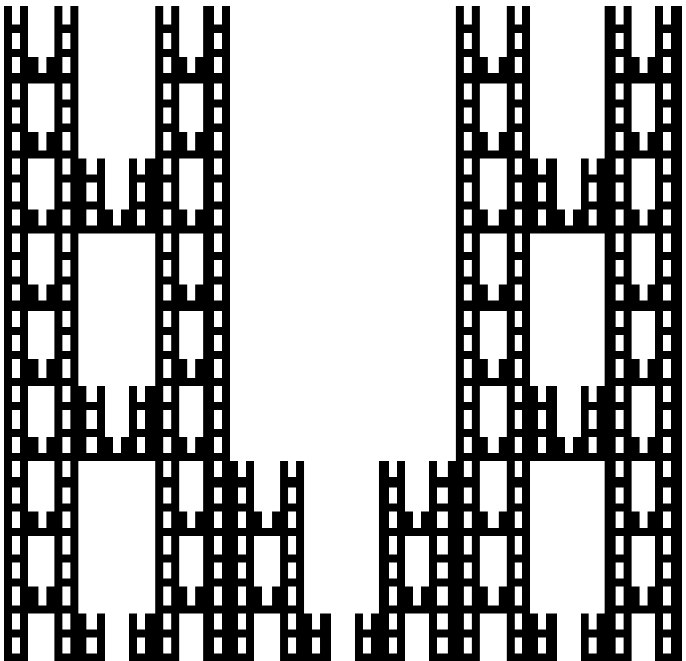
$$r_n = \frac{1}{3^n} \Rightarrow N(r_n) = 8^n$$

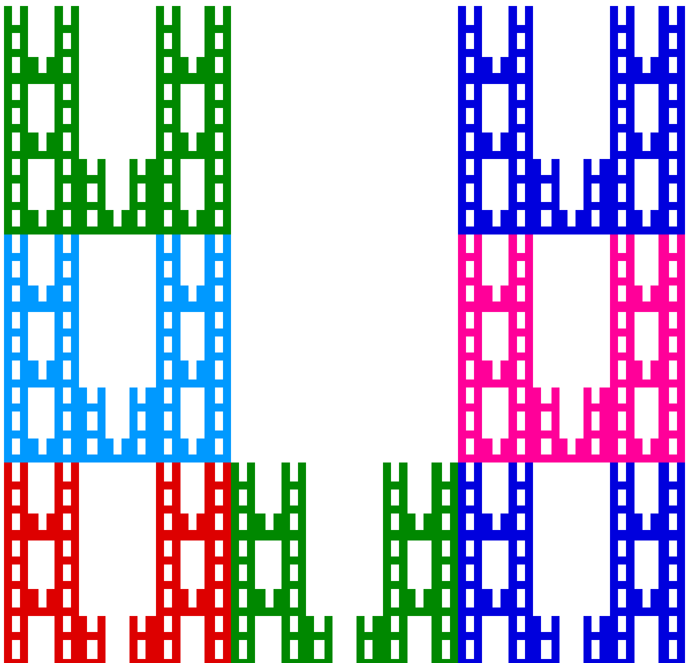
$$d_b = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N(r_n)}{\log(\frac{1}{r_n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 8^n}{\log \frac{1}{\frac{1}{3^n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\text{nlog}\, 8}{n \log 3} = \frac{\log 8}{\log 3} \cong 1.892789261$$

Bu fraktala **Sierpinski Halısı** denir.

ÖRNEK-3: Bir sonraki slayttaki şekilde, soldaki (siyah) fraktalın benzerlik boyutunu bulalım.





Sağdaki şekilden de görüldüğü gibi, her biri r=⅓ ölçekli kendine benzer n=7 parçaya bölünebilir.

$r_0 = 1 \Rightarrow N(r_0) = 1$

$r_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow N(r_1) = 7$

$r_2 = \frac{1}{9} \Rightarrow N(r_2) = 49 = 7^2$

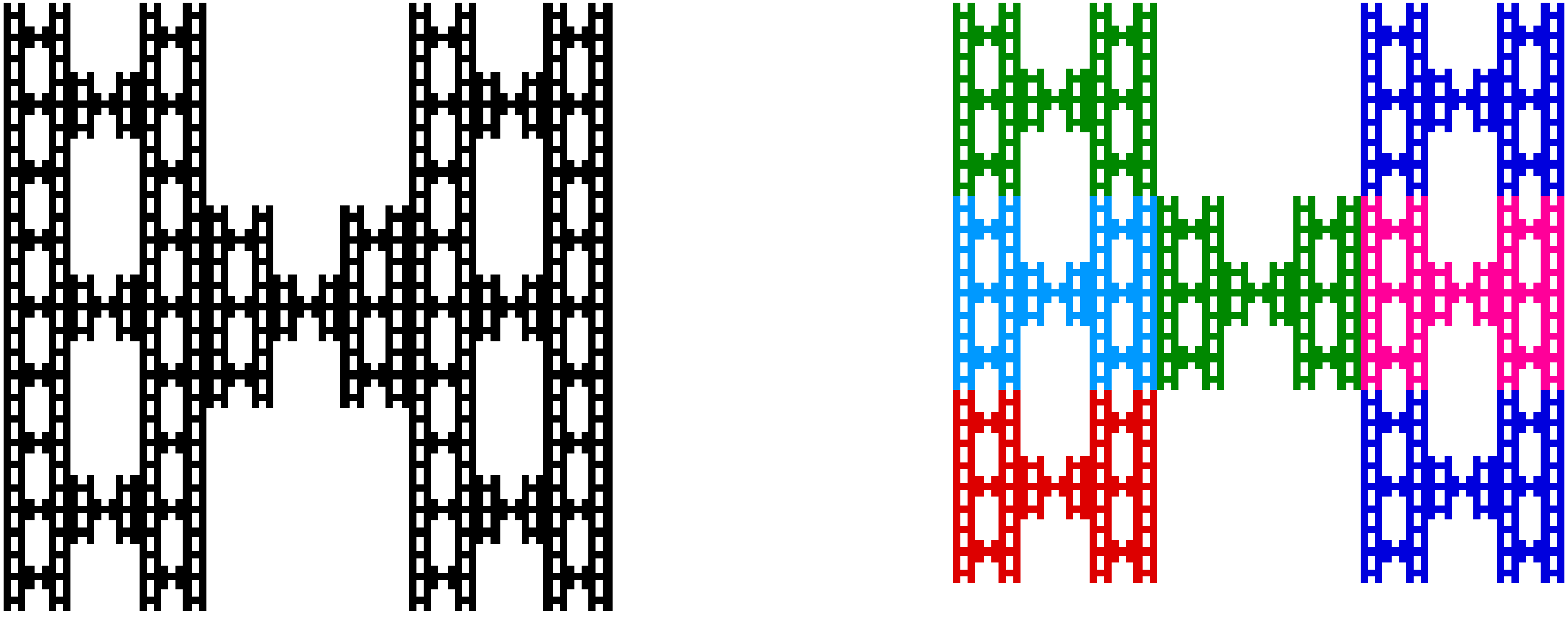
$r_n = \frac{1}{3^n} \Rightarrow N(r_n) = 7^n$

$$d_b = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N(r_n)}{\log(\frac{1}{r_n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 7^n}{\log \frac{1}{\frac{1}{3^n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{n}\log 7}{n \log 3} = \frac{\log 7}{\log 3} \cong 1.771243749$$

Bu fraktal ÖRNEK-2’deki fraktalın ortadaki kırmızı parçasının atılmasıyla elde edilir.

ÖRNEK-4: Bir sonraki slayttaki şekilde, soldaki (siyah) fraktalın benzerlik boyutunu bulalım.

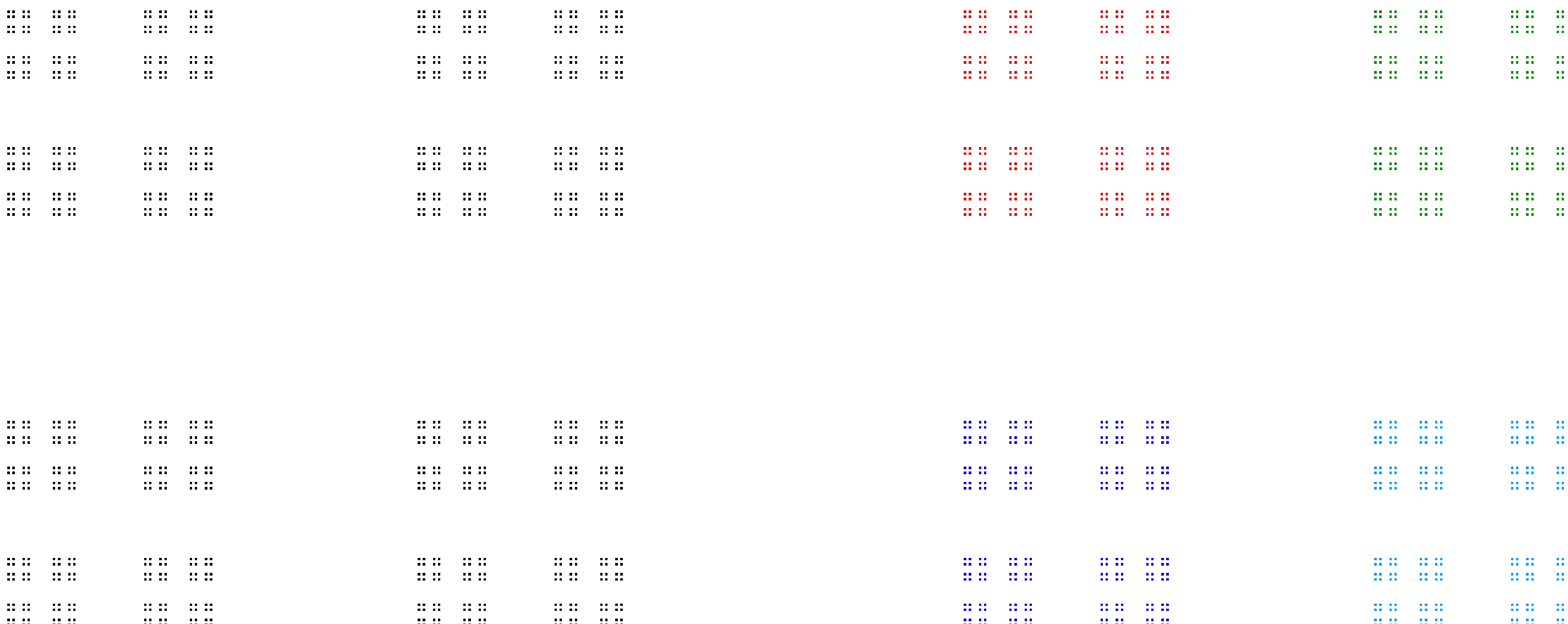


Sağdaki şekilden de görüldüğü gibi her biri r$=$ ⅓ ölçekli kendine benzer n=7 parçaya bölünebilir.

$d_b = \frac{\log 7}{\log 3}$ dir.

Bu fraktalın ÖRNEK-3' deki alt sıradaki yeşil parçanın çıkarılmasıyla elde edildiğine dikkat edin. ÖRNEK-3 ve ÖRNEK-4' ün karşılaştırılması ile boyutun parçalarının yerleriyle değil de, sayıları ve boylarıyla tanımlı olduğu sonucu elde edilir (Eğer parçalar özel şekilde üst üste geliyorlarsa dikkatli olunmalıdır).

ÖRNEK-5: Bir sonraki slayttaki şekilde, soldaki (siyah) fraktalın benzerlik boyutunu bulalım.



Şekil her biri r=⅓ ölçekli kendine benzer n=4 parçaya ayrılabilir.

$r_0 = 1 \Rightarrow N(r_0) = 1$

$r_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow N(r_1) = 4$

$r_2 = \frac{1}{9} \Rightarrow N(r_2) = 16 = 4^2$

$r_n = \frac{1}{3^n} \Rightarrow N(r_n) = 4^n$

$$d_b = \lim_{n \to \infty} \frac{\log N(r_n)}{\log(\frac{1}{r_n})} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log 4^n}{\log \frac{1}{\frac{1}{3^n}}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{n}\log 4}{n \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1.261859507$$

Eğer parçalar r=$^1/_4$ ölçekli alınsaydı karşımıza ilginç bir durum çıkardı. Bu durumda benzerlik boyutu ne olurdu?

$r_0 = 1 \Rightarrow N(r_0) = 1$

$r_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow N(r_1) = 4$

$r_2 = \frac{1}{16} \Rightarrow N(r_2) = 16 = 4^2$

$r_n = \frac{1}{4^n} \Rightarrow N(r_n) = 4^n$

$$d_b = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N(r_n)}{\log(\frac{1}{r_n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 4^n}{\log\frac{1}{\frac{1}{4^n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{nlog}\, 4}{n \log 4} = \frac{\log 4}{\log 4} = 1$$

Bu bir doğrunun boyutudur, ama bu fraktal bir doğruya benzemez. Bununla birlikte, d_b formülünün, parçaların nerede olduklarına değil, onların sayı ve boylarına bağlı olduğuna dikkat edin. Kabul edelim ki bazı parçaları hareket ettirdik. Parçaların yeni konumları bize yukarıda bulduğumuz boyut hesabını doğrulayabilir mi?

ÖRNEK-6: Bir sonraki slayttaki şekil, her biri r=½ ölçekli kendine benzer n=4 parçaya ayrılabilir.

$r_0 = 1 \Rightarrow N(r_0) = 1$

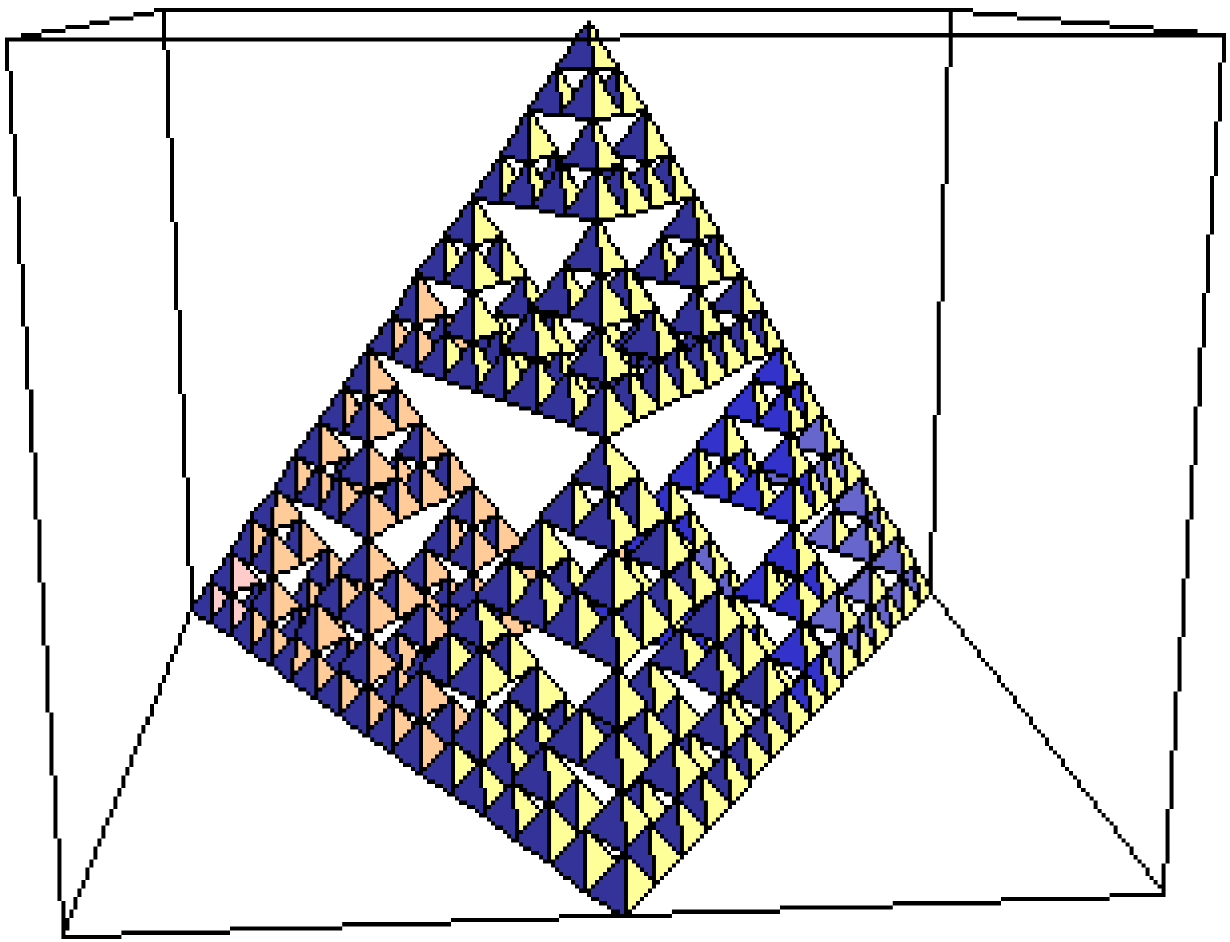
$r_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow N(r_1) = 4$

$r_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow N(r_2) = 16 = 4^2$

$r_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow N(r_n) = 4^n$

$$d_b = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N(r_n)}{\log(\frac{1}{r_n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 4^n}{\log \frac{1}{\frac{1}{2^n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\text{nlog}\, 4}{n \log 2} = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$



Karışık şekillerin düzlemsel izdüşümlerini üç boyutta incelemek zordur. Buna yardımcı olması için, ayrışıma ulaştıran üç adım aşağıda verilmiştir.