MORAN DENKLEMİ

Benzerlik boyutunu veren $d_b = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$ formülü,

Tüm parçaları aynı ölçekli kendine benzer fraktallara uygulanabilir. Ama elimizde farklı parçaları farklı ölçekli olan kendine benzer bir fraktal olduğunu düşünelim. Diyelim ki fraktal ölçekleri $r_1, r_2, \dots, r_N$ olan N parçaya bölünebilsin. Benzerlik boyutu formülünü nasıl genelleştireceğiz?

Bu formülü, her bir ölçeği diğerinden ayırt edecek şekilde yeniden yazmalıyız. Ancak ondan sonra r’ nin farklı r_i değerlerini değiştirebiliriz.

d=d_b alarak,

d=$\frac{\log N}{\log\frac{1}{r}}$ ifadesi, dlog $\frac{1}{r}$=$\log N$şeklinde yazılabilir.

Bu ifadeden üslü olarak; $\left(\frac{1}{r}\right)^{d} = N$ yazılabilir.

Bu ise; 1=Nr^d ve böylece fraktal bölündüğünde her bir kopya için aynı r’ yi veren 1=$r^d + r^d + \cdots + r^d$ (N-tane) ifadesi elde edilir.

Her bir r kopyası için r_i yi alırsak, d benzerlik boyutunun sağlamak zorunda olduğu 1=${r_1}^d + {r_2}^d + \cdots + {r_N}^d$ yi elde ederiz. Bu ifade **Moran Denklemi**’ dir.

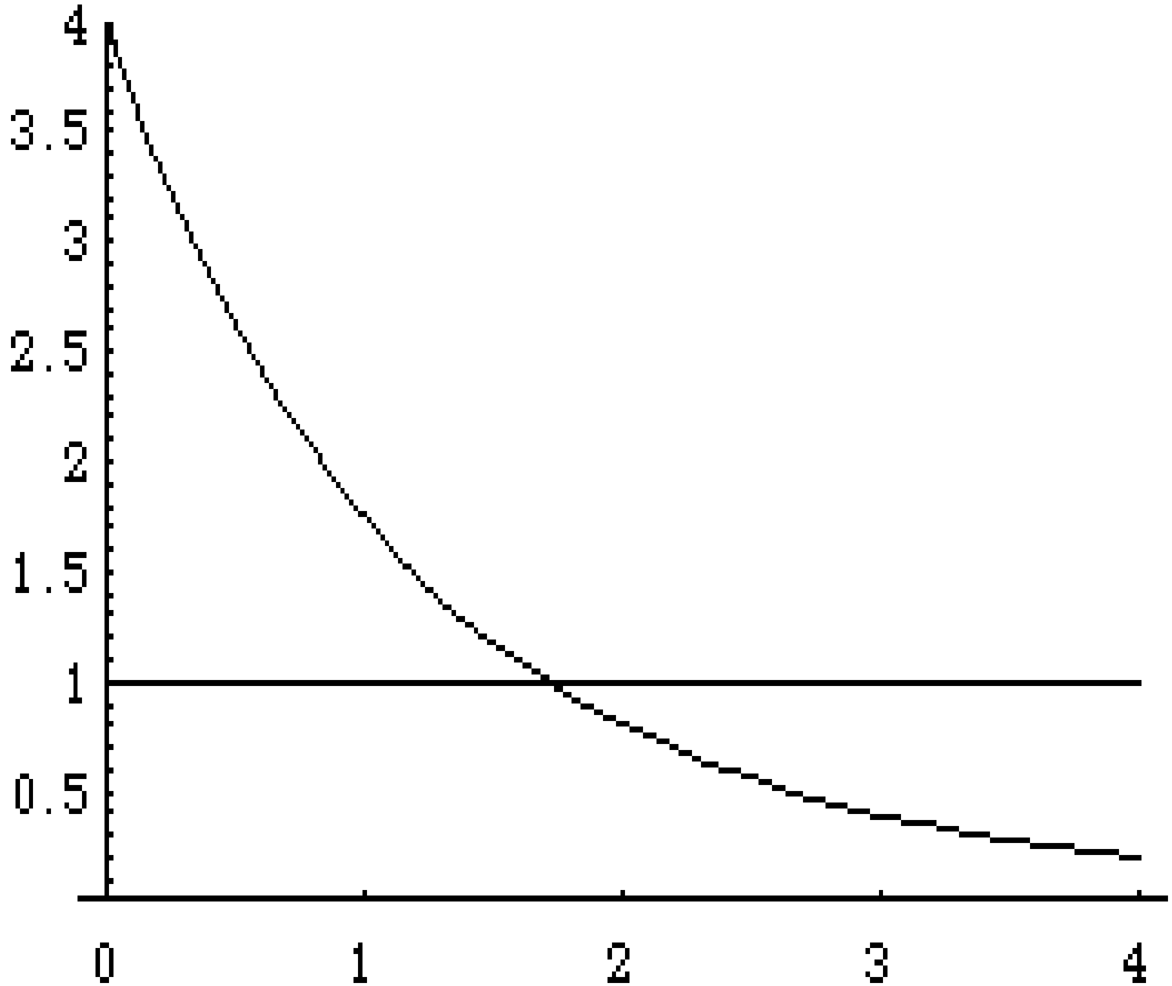
Her bir r_i, 0< $r_i < 1$ olduğu sürece, Moran Denklemi' nin çözümü tektir ve bu çözüm d=d_b **benzerlik boyutu**' dur. Şimdi **çözümün tekliğini** gösterelim:

1=${r_1}^d + \cdots + {r_N}^d$ nin 0< $r_1 < 1, \ldots,$ 0< $r_N < 1$ da çözümünün tek olduğunu göstermek için f(d)=${r_1}^d + \cdots + {r_N}^d$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

Burada f(0)=${r_1}^0 + \cdots + {r_N}^0$=1+$\cdots + 1 = N$ olduğunu görüyoruz. İkinci olarak, d$\rightarrow \infty$ için f(d)$\rightarrow 0$ dır. Bunun sebebi her $r_i < 1$ (ve 0$< r_i$) olduğundan, d$\rightarrow \infty$ iken her bir ${r_i}^d \rightarrow 0$ olacaktır. Üçüncü olarak, f(d) nin grafiği sürekli azalandır.

Türevi, f$'(d) = {r_1}^d \ln(r_1) + \cdots + {r_N}^d \ln(r_N)$ dir. 0$< r_i < 1$ olduğundan, her bir $\ln(r_i) < 0$ ve f'(d)<0 dır.

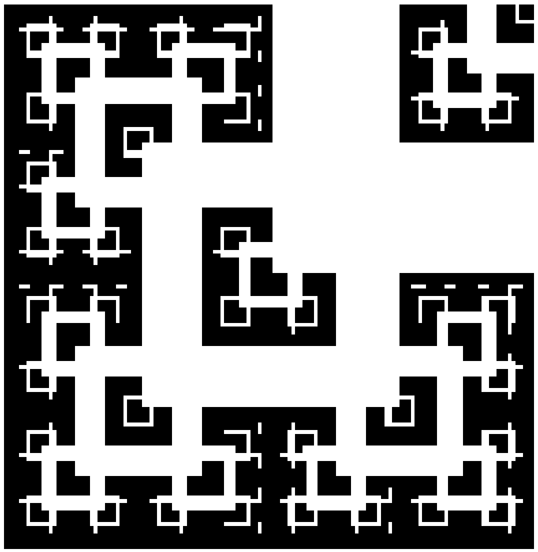
ÖRNEK: N=4, $r_1 = r_2 = r_3 =$ ½ ve r_4=$^1/_4$ için f(d) nin d ye göre grafiği aşağıdadır. Y=f(d) nin grafiğinin y=1’ i d=1.72368 de kestiğine dikkat edin. Bu değer, bu ölçeklere göre fraktalın benzerlik boyutudur.

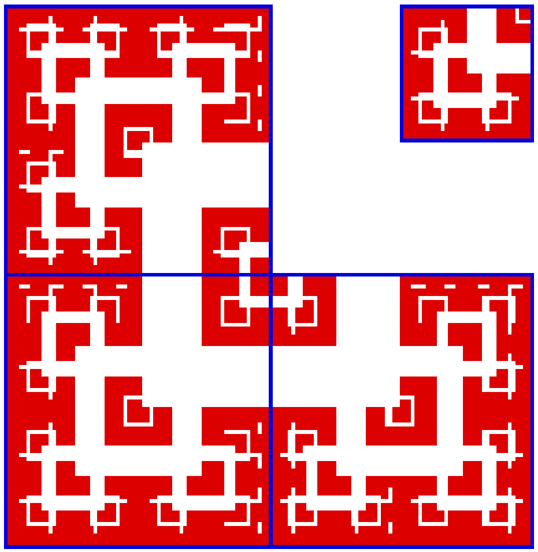

4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
1
2
3
4

Böyle bir fraktalın resmi nasıl olabilir?

Aşağıda verilen fraktallardan bazılarının benzerlik boyutlarını bulalım:

ÖRNEK-1:



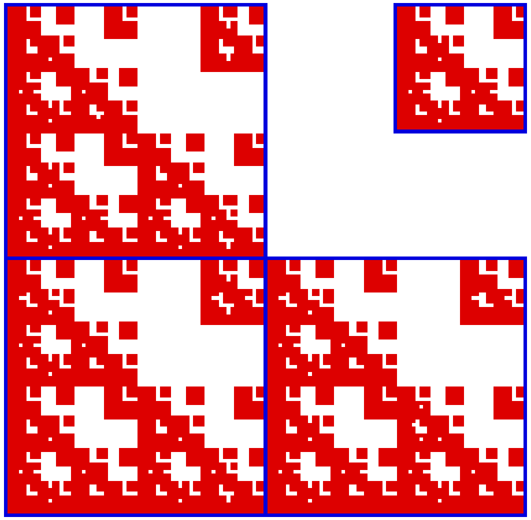


Elimizde, 1. adımda, $\frac{1}{2}$ ölçekli 3 kendine benzer şekil ve 1 tane $\frac{1}{4}$ ölçekli 1 kendine benzer şekil var. Dolayısıyla Moran Denklemi' nden

$3\,\frac{1}{2^d} + 1\,\frac{1}{4^d} = 1$ dir.

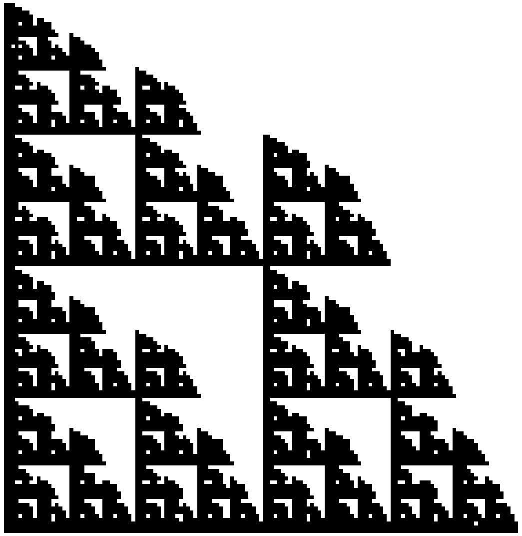
Çözümün tekliğinden, d=1.72368 bulunur.

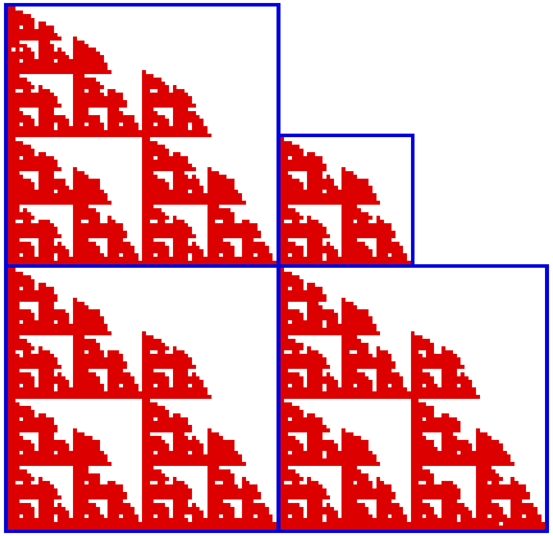
ÖRNEK-2:



Bu fraktalda da 1. adımda, $\frac{1}{2}$ ölçekli 3 kendine benzer şekil ve 1 tane $\frac{1}{4}$ ölçekli 1 kendine benzer şekil var. Dolayısıyla Moran Denklemi’ nden d=1.72368 bulunur.

ÖRNEK-3:





Bu fraktal için ise d=1.72368 dır. Moran Denklemi analitik olarak $^1/_4=(½)^2$ alındığında çözülebilir:

$3(^1/_2)^d + (^1/_4)^d$=1 denklemi

$3(^1/_2)^d + \left((^1/_2)^2\right)^d = 1$ olarak ve

$3(^1/_2)^d + \left((^1/_2)^d\right)^2 = 1$ olarak yazılabilir.

$({}^{1}/_{2})^{d}$=x alınırsa, Moran Denklemi $3x \quad + x^2$=1 olur.

Buradan x =$(-3 \pm {}^{\sqrt{13}}/_{2})$ dir. $x = ({}^{1}/_{2})^{d}$ pozitif olduğundan, $x = -1 + {}^{\sqrt{13}}/_{2}$ ve buradan d=$\frac{\log\left(-3+{}^{\sqrt{13}}/_{2}\right)}{\log({}^{1}/_{2})}$ dir. Bu yaklaşım, tüm ölçekleri, ölçeklerinden birinin (tam sayı) kuvveti olması halinde kullanılabilir.