DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

denklemi

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

şeklinde yazılabiliyorsa verilen denklem Ayrılabilirdir denir. Bir diferensiyel denklemin ayrılabilir olması P ve Q katsayılarının f(x).g(y) biçiminde çarpanlarına ayrılabilmesine bağlıdır. Böyle denklemler değişkenlerine ayrılabilirdir. Denklemin çözümü

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

nin doğrudan integrali alınarak elde edilir.

Örnek 1. Aşağıdaki denklemin çözümünü elde ediniz.

$$2(y+3)dx - xydy = 0$$

Çözüm:

$$\frac{2}{x}dx = \frac{y}{y+3}dy$$

$$= \left(1 - \frac{3}{y+3}\right)dy$$

$$2lnx = y - 3\ln(y+3) + lnc$$

$$\boxed{e^y = cx^2(y+3)^3}$$

denklemin bir parametreli çözümüdür (ya da integral eğrileridir).

Örnek 2. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

denkleminde integral alınırsa

$$arctanx + arctany = arctanc$$

ifadesi elde edilir. Bu çözümden daha iyi bir gösterim;

$$\boxed{y = \frac{c-x}{1+cx}}$$

şeklindedir. (Gösteriniz.)

Örnek 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$$

denkleminin y(0)=-1 koşulunu sağlayan çözümünü y=f(x) şeklinde bulunuz.

Çözüm:

$$2(y-1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$$

y(0)=-1 den;

$$1 + 2 = c \Rightarrow c = 3$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

buradan aranan çözüm;

$$\boxed{y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}}$$

şeklinde elde edilir.

HOMOGEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Homogen Fonksiyon: Eğer bir f(x,y) fonksiyonu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

şeklinde yazılabilecek biçimde bir n reel sabiti bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna x ve y'e göre n-yinci dereceden homogen fonksiyon adı verilir.

Örnek 1. $f(x,y) = 3x + 5y$ fonksiyonu x ve y'e gore 1. dereceden homogen bir fonksiyondur;

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 3\lambda x + 5\lambda y \\ &= \lambda(3x + 5y) \\ &= \lambda f(x,y) \end{aligned}$$

Örnek 2. $f(x,y) = x^2 + 5xy - 3y^2$ fonksiyonu x ve y'e gore 2. dereceden homogen bir fonksiyondur;

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^2 x^2 + 5\lambda^2 xy - 3\lambda^2 y^2 \\ &= \lambda^2(3x^2 + 5xy - 3y^2) \\ &= \lambda^2 f(x,y) \end{aligned}$$

Homogen diferensiyel denklemler bu tür fonksiyonlardan elde edilir;

Homogen Diferensiyel Denklem

Eğer

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

denkleminde P ve Q aynı dereceden homogen fonksiyonlar ise bu durumda verilen diferensiyel denklem Homogen Diferensiyel Denklem adını alır. Bu özelliğe sahip her denklem

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

şeklinde yazılabilirdir. Diğer yandan bu biçimdeki denklemler de Homogen diferensiyel denklem olarak adlandırılır. Homogen diferensiyel denklemin bu özelliği çözüm yöntemini de beraberinde getirir.

$$\begin{aligned} y &= xv \\ y' &= v + xv' \end{aligned}$$

konumları denkleme uygulanırsa verilen denklem kesinlikle Değişkenlerine ayrılabilen bir denkleme indirgenecektir.

Örnek 1. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ denkleminin çözümünü bulun.

Çözüm. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} = f(\frac{y}{x})$ şeklinde yazılabildiğinden verilen denklem Homogen bir diferensiyel denklemdir.

$$y = xv$$
$$y' = v + xv'$$
denklemde yerine yazıldığında,

$$v + xv' = \frac{\sqrt{x^2 - x^2\, v^2} + xv}{x} = \sqrt{1 - v^2} + v$$
$$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 - v^2}$$
denklemi elde edilir. Bu aşamadan sonra denklem değişkenlerine ayrılabilirdir;

$$\frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$arcsinv = lnx + lnc = lncx$$
$$v = Sin(lncx)$$
$v = \frac{y}{x} \Longrightarrow$

$$\boxed{y = xSin(lncx)}$$
çözümü elde edilir.

Örnek 2. $xy' = y(lny - lnx)$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen denklem $y' = \frac{y}{x} ln\frac{y}{x}$ şeklinde yazılabildiğinden Homogendir.

$$y = xv$$
$$y' = v + xv'$$
yerlerine yazılırsa

$$x\frac{dv}{dx} = vlnv - v$$
denklemine varılır. Bu denklem değişkenlerine ayrılırsa

$$\frac{dv}{vlnv - v} = \frac{dx}{x}$$

elde edilir. Sol tarafın integrali için $lnv = z$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{dz}{z - 1} = \frac{dx}{x}$$
elde edilir. İntegral alınır ve değişkenler sırasıyla yerlerine yazılırsa;

$$\boxed{y = xe^{cx+1}}$$
genel çözüm olarak elde edilir.