İkinci Basamaktan Değişken Katsayılı Lineer Denklemler

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x) \tag{1}$$

denklemini ele alalım. P ve Q katsayıları sabit olduğu zaman denklem önceki yöntemlerle çözülebilir, aksi durumda genel bir çözüm yöntemi olmamakla birlikte aşağıdaki yöntemler uygulanabilir.

1) Bağımlı Değişken Değiştirme

$y = uv,\ u = u(x),\ v = v(x)$ dönüşümü altında (1) denklemi

$$\frac{d^2v}{dx^2} + P_1(x)\frac{dv}{dx} + Q_1(x)v = R_1(x) \tag{2}$$

şeklinde yazılır; burada

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{2}{u}\frac{du}{dx} + P(x), \\ Q_1(x) &= \frac{1}{u}\left[\frac{d^2u}{dx^2} + P(x)\frac{du}{dx} + Q(x)u\right], \\ R_1(x) &= \frac{R(x)}{u}. \end{aligned}$$

A) Basamağın İndirgenmesi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \tag{3}$$

denklemini bir özel çözümü bilinirse, bu durumda $Q_1(x) = 0$ olup, (2) denklemi

$$\frac{d^2v}{dx^2} + P_1(x)\frac{dv}{dx} = R_1(x) \tag{4}$$

şeklini alır. $\dfrac{dv}{dx} = p$ alınarak (4) denklemi

$$\frac{dp}{dx} + P_1(x)p = R_1(x) \tag{5}$$

şeklinde birinci basamaktan denkleme indirgenir.

Teorem 1

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

homogen denklemi için

a) $P + xQ = 0$ ise, $y = x$ bir özel çözümdür;
b) $1 + P + Q = 0$ ise, $y = e^x$ bir özel çözümdür;
c) $1 - P + Q = 0$ ise, $y = e^{-x}$ bir özel çözümdür;
d) $m^2 + mP + Q = 0$ ise, $y = e^{mx}$ bir özel çözümdür.

Örnek

$$x^2(x+1)y'' - x\left(2 + 4x + x^2\right)y' + \left(2 + 4x + x^2\right)y = -x^4 - 2x^3 \tag{6}$$

denklemini çözünüz.
Çözüm. Verilen denklemde $P + xQ = 0$ olduğundan, $y = x$ karşılık gelen homogen denklemin bir çözümüdür. O halde (6) denklemine $y = xv$ konumu uygulanırsa, denklem

$$\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{x+2}{x+1}\frac{dv}{dx} = -\frac{x+2}{x+1}$$

denklemine indirgenir, $\dfrac{dv}{dx} = p$ alınırsa birinci basamaktan

$$\frac{dp}{dx} - \frac{x+2}{x+1}p = -\frac{x+2}{x+1}$$

denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü

$$p = 1 + c_1 (x+1) e^x$$

dir. $\dfrac{dv}{dx} = p$ den,

$$v = x + c_1 x e^x + c_2$$

olup, $y = vx$ den

$$y = x^2 + c_1 x^2 e^x + c_2 x$$

elde edilir.