3) Operatörün Çarpanlara Ayrılması

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f(x) \tag{1}$$

denklemi verilsin. Bu denklemin operatör gösterimi

$$L(D) = a_0(x)\,D^2 + a_1(x)\,D + a_2(x)$$

olmak üzere

$$L(D)\,y = f(x)$$

dir. $L(D)$ operatörü

$$L(D) = L_1(D)\,L_2(D)$$

şeklinde yazılabilirse, o zaman $L(D)$ ye çarpanlarına ayrılabilir bir operatör denir; burada

$$L_1(D) = \alpha(x)\,D + \beta(x)\,,\; L_2(D) = \delta(x)\,D + \gamma(x)\,.$$

(1) denkleminin

$$L_1(D)\,L_2(D)\,y = f(x) \tag{2}$$

şeklinde yazılabildiğini kabul edelim.

$$L_2(D)\,y = v \tag{3}$$

alınırsa (2) denklemi

$$L_1(D)\,v = f(x)$$

şeklinde birinci basamaktan denkleme indirgenir, bu denklemin çözümü olan v fonksiyonu (3) de yazılarak verilen denklemin $y(x)$ çözümü bulunur.
Örnek. $\left[xD^2 + (1-x)\,D - 2(1+x)\right] y = e^{-x}(1-6x)$ denklemini çözünüz.
Çözüm. Verilen denklem

$$[xD + (1+x)]\,[D-2]\,y = e^{-x}(1-6x) \tag{4}$$

denklemine eşdeğerdir. $(D-2)\,y = v$ alınırsa, (4) denklemi

$$(xD + 1 + x)\,v = e^{-x}(1-6x)$$

şeklini alır. Bu ise

$$v = c_1\frac{e^{-x}}{x} + (1-3x)\,e^{-x}$$

çözümüne sahiptir. Böylece

$$[D-2]\,y = c_1\frac{e^{-x}}{x} + (1-3x)\,e^{-x}$$

olup buradan $y(x)$ çözümü elde edilir.
Örnek. $xy'' - \left(x^3+1\right) y' - x^2 y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklem

$$\left(xD^2 - \left(x^3 + 1\right) D - x^2\right) y = 0$$

şeklinde olup

$$\left(xD - 1\right) \left(D - x^2\right) y = 0$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. $\left(D - x^2\right) y = v$ olmak üzere

$$\left(xD - 1\right) v = 0$$

denklemini çözümü $v = xc_1$ olup $\left(D - x^2\right) y = xc_1$ den $y\left(x\right)$ çözülür.