Lineer Sınır Değer Problemleri
Bu bölümde ikinci basamaktan lineer homogen olmayan

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = f(x) \tag{1}$$

denklemi ve

$$\begin{aligned} \ell_1[y] &= a_0 y(a) + a_1 y'(a) + \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = A \\ \ell_2[y] &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + b_0 y(b) + b_1 y'(b) = B \end{aligned} \tag{2}$$

sınır koşulları ele alınmaktadır. (1)−(**2**) problemine homogen olmayan iki nokta sınır değer problemi denir. Homogen

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0 \tag{3}$$

denklemi ve

$$\ell_1[y] = 0,\ \ell_2[y] = 0 \tag{4}$$

sınır koşullarından meydana gelen probleme de homogen sınır değer problemi denir. Sınır koşullarının bazı özel durumlar aşağıdaki gibi verilir:
1) Dirichlet koşulları: $y(a) = A,\ y(b) = B,$
2) Karışık koşullar: $y(a) = A,\ y'(b) = B$ ya da $y'(a) = A,\ y(b) = B,$
3) Ayrılmış sınır koşulları: $a_0 y(a) + a_1 y'(a) = A,\ b_0 y(b) + b_1 y'(b) = B,$
4) Periyodik sınır koşulları $y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b).$

Tanım 1. a ve b nin ikisi de sonlu ve her $x \in I$ için $p_0(x) \neq 0$ ise, o zaman (1) − (**2**) problemi düzgün (regüler) sınır değer problemi adını alır. $a = -\infty$ ve/veya $b = +\infty$ ve/veya $p_0(x)$ katsayısı en az bir $x \in I$ için sıfır ise, bu durumda (1) − (**2**) problemine singüler sınır değer problemi denir. Biz sadece düzgün (regüler) sınır değer problemlerini ele alacağız.

Tanım 2. (1) − (**2**) BVP nin çözümünden, (1) denkleminin (**2**) sınır koşullarını sağlayan bir çözümü anlaşılır.

Örnek 1.

$$\begin{aligned} y'' + y &= 1, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ y(0) &= 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

iki nokta sınır değer problemini çözünüz.

Çözüm. Verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

dir. Koşulların bu çözüme uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + 1 = 0, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= c_1 + 1 = 1, \end{aligned}$$

olup $c_1 = -1$ ve $c_2 = 0$ bulunur. Böylece istenen çözüm

$$y(x) = 1 - \cos x$$

olur.
Teorem 1. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$, (3) denkleminin herhangi lineer bağımsız çözümü olsun. Bu durumda (3)-(4) homogen sınır değer probleminin sadece sıfır çözümüne sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$\Delta = \begin{vmatrix} \ell_1[y_1] & \ell_1[y_2] \\ \ell_2[y_1] & \ell_2[y_2] \end{vmatrix} \neq 0$$

dır.
Sonuç. (3)-(4) homogen BVP nin sonsuz sayıda belirgin olmayan çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul $\Delta = 0$ dır.
Örnek 2.

$$xy'' - y' - 4x^3 y = 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \ell_1[y] &= y(1) = 0 \\ \ell_2[y] &= y(2) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

BVP yi ele alalım. (5) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü

$$y_1(x) = \cosh\left(x^2 - 1\right) \text{ ve } y_2(x) = \frac{1}{2}\sinh\left(x^2 - 1\right)$$

olup, sınır koşullarından

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cosh 3 & \frac{1}{2}\sinh 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

dır. O halde verilen BVP sadece aşikar çözüme sahiptir.
Teorem 2. (Fredholm Alternative Teoremi)
Homogen olmayan (1)-(2) BVP nin bir tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul (3)-(4) homogen BVP nin sadece sıfır çözüme sahip olmasıdır.