Sturm-Liouville Problemleri

Önceki bölümde, bir homogen sınır değer probleminin belirgin olmayan çözümlere sahip olabileceği gösterildi. Diferensiyel denklemin katsayıları ve/veya sınır koşulları bir parametreye bağlı iken, aşikar olmayan çözümlerin varlığını garanti eden parametrenin değerlerini belirlemek matematik fiziğin önde gelen problemlerinden biridir. Parametrenin bu özel değerleri özdeğerler adını alırken, karşılık gelen belirgin olmayan çözümler özfonksiyonlar adını alır.

self-adjoint

$$\left(p\left(x\right)y^{'}\right)^{'}+q\left(x\right)y+\lambda w\left(x\right)y=0 \tag{1}$$

denklemi ve

$$\begin{aligned} a_0y\left(a\right)+a_1y^{'}\left(a\right) &= 0 \\ b_0y\left(b\right)+b_1y^{'}\left(b\right) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

sınır koşullarından oluşan $(1)-(2)$ homogen BVP ne Sturm-Liouville problemi denir; burada λ bir parametredir; $q,\ w\in C\left(I\right)$, $p\in C^1\left(I\right)$ ve her $x\in I=[a,b]$ için $p\left(x\right)>0$, $w\left(x\right)>0$ dır. Bu koşulları sağlayan $(1)-(2)$ problemine bir düzgün Sturm-Liouville problemi (regular S-L problem) denir. Aksi halde düzgün olmayan S-L problemi (singular S-L problem) denir. Böyle bir problemi çözmek demek, λ değerlerini (özdeğerleri) ve karşılık gelen aşikar olmayan $\phi_\lambda\left(x\right)$ çözümlerini (özfonksiyonları) bulmak demektir. Bir düzgün problemin bütün özdeğerlerinin cümlesine onun spektrumu denir.

Özdeğer ve özfonksiyonların hesabı aşağıdaki örneklerde açıklanmaktadır.

Örnek 1:

$$y^{''}+\lambda y=0 \tag{3}$$

$$y\left(0\right)=y\left(\pi\right)=0 \tag{4}$$

BVP nin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $\lambda=0$ ise, (3) ün genel çözümü

$$y\left(x\right)=c_1+c_2x$$

dir. Bu çözüm (4) deki sınır koşullarını ancak ve ancak

$$c_1=c_2=0$$

olduğu zaman sağlar. Buradan $y\left(x\right)\equiv 0$, $(3)-(4)$ BVP nin tek çözümüdür. O halde, $\lambda=0$, $(3)-(4)$ problemi için bir özdeğer olamaz.

$\lambda=\mu^2$ $(\mu>0)$ olsun. Bu durumda (3) ün genel çözümü

$$y\left(x\right)=c_1\cos\left(\mu x\right)+c_2\sin\left(\mu x\right)$$

dir. (4) sınır koşulları uygulanırsa,

$$\begin{aligned} y\left(0\right) &= c_1=0\ , \\ y\left(\pi\right) &= c_2\sin\left(\mu\pi\right)=0\ . \end{aligned}$$

Buradan, $c_2 \neq 0$ ve $\sin(\mu\pi) = 0$ alınırsa,

$$\mu = n \quad , \quad n = 1, 2, ...,$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$y(x) = c_2 \sin(nx)$$

yani

$$\phi_n(x) = \sin(nx) \quad , \quad n = 1, 2, ...,$$

özfonksiyonları bulunur. Bu durumda problemin özdeğerleri

$$\lambda = n^2 \quad , \quad n = 1, 2, ...,$$

dir. Şimdi, $\lambda = -\mu^2$ $(\mu > 0)$ olsun. Bu durumda (3) ün genel çözümü

$$y(x) = c_1 e^{-\mu x} + c_2 e^{\mu x}$$

dir. (4) sınır koşulları uygulanırsa,

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \quad , \\ y(\pi) &= c_1 e^{-\mu\pi} + c_2 e^{\mu\pi} = 0 \quad , \end{aligned} \tag{5}$$

sistemi bulunur. Bu sistemin katsayılar determinantı sıfırdan farklı olduğundan, sadece $c_1 = c_2 = 0$ aşikar çözümüne sahiptir. Dolayısıyla, $y(x) \equiv 0$ çözümüne varılır. Bu ise bir özfonksiyon değildir. O halde, $(3) - (4)$ probleminin negatif özdeğerleri yoktur.

Örnek 2: Düzgün

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{6}$$

$$y(0) + y'(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0 \tag{7}$$

S-L probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulunuz.

Tanım 1: $\{\phi_n(x) \quad , \quad n = 0, 1, 2, ..., \}$ fonksiyonlar cümlesi sonsuz ya da sonlu bir $[a, b]$ aralığında parçalı sürekli olsun.

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b w(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0 \ , \quad \forall m \neq n \quad ,$$

ve

$$\int_a^b w(x) \phi_n^2(x) dx \neq 0 \quad , \quad \forall n \quad \text{için} \quad ,$$

ise, bu durumda $\{\phi_n(x) \quad , \quad n = 0, 1, 2, ..., \}$ cümlesine $[a, b]$ aralığında negatif olmayan $w(x)$ fonksiyonuna göre ortogonaldir denir. Böyle bir $w(x)$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir. Burada $w(x)$ in $[a, b]$ aralığında en fazla sonlu sayıda sıfıra sahip olabileceği ve

$$\int_a^b w(x) \phi_n(x) dx \quad , \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

integrallerinin mevcut olduğu kabul edilmektedir. $\{\phi_n(x) \ , \quad n = 0, 1, 2, ..., \}$ ortogonal cümlesine,

$$\int_a^b w(x)\,\phi_n^2(x)\,dx = 1 \quad , \quad \forall n \quad \text{için} \quad ,$$

ise, $[a, b]$ aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormaldir denir.

Uyarı 1: Ortonormal fonksiyonlar ortogonal fonksiyonlarla aynı özelliklere sahiptir. Dolayısıyla, ortogonal cümlenin her bir $\phi_n(x)$ elemanı

$$\|\phi_n\| = \left(\int_a^b w(x)\,\phi_n^2(x)\,dx \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlı norma bölünerek, ortonormal cümle elde edilir.

Örnek 1'e tekrar dönersek, $(3) - (4)$ BVP nin özfonksiyonlar $\phi_n(x) = \sin(nx)$, $n = 1, 2, ...,$ cümlesi $[0, \pi]$ aralığında $w(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir denir. Çünkü

$$\int_a^b \sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0 \ , \quad \forall m \neq n \quad ,$$

dir. $(3) - (4)$ BVP nin özdeğer ve özfonksiyonlarına ait özellikler, genel olarak $(1) - (2)$ düzgün S-L problemi için de geçerlidir. Şimdi, bu özellikleri ifade edelim.

Teorem 1: Düzgün $(1) - (2)$ S-L probleminin özdeğerleri basittir; yani, λ, $(1) - (2)$ probleminin bir özdeğeri ve $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ karşılık gelen özfonksiyonlar ise, o zaman $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ lineer bağımlıdır.

Teorem 2: λ_n , $n = 1, 2, ...,$ düzgün $(1) - (2)$ S-L probleminin özdeğerleri ve $\phi_n(x)$, $n = 1, 2, ...,$ karşılık gelen özfonksiyonları olsun. Bu durumda $\{\phi_n(x) \ , \quad n = 0, 1, 2, ..., \}$ cümlesi $[a, b]$ aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

Sonuç 1: λ_1 ve λ_2 düzgün $(1) - (2)$ S-L probleminin iki özdeğeri ve $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, sırasıyla, karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. Bu durumda ancak, $\lambda_1 = \lambda_2$ ise, $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ lineer bağımlıdır.

Teorem 3: Düzgün $(1) - (2)$ S-L probleminin bütün özdeğerleri gerçeldir.

Teorem 4: Düzgün $(1) - (2)$ S-L problemi için sonsuz sayıda λ_n , $n = 1, 2, ...,$ özdeğer vardır. Bu özdeğerler

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

olmak üzere

$$\lambda_1 < \lambda_2 < ...$$

şeklinde monoton artan bir dizi oluşturur. Ayrıca, λ_n özdeğerine karşılık gelen $\phi_n(x)$ özfonksiyonu (a, b) açık aralığında tam $(n-1)$ tane sıfıra sahiptir.

Şimdi singüler S-L problemleri için aşağıdaki örnekleri ele alalım. Bu örneklerde, düzgün problemler için olan özelliklerin bu defa sağlanmadıkları görülecektir.

Örnek 3: Singüler S-L

$$y^{''} + \lambda y = 0 \tag{8}$$

$$y(0) = 0 \quad , \quad |y(x)| \leq M < \infty \quad , \quad \forall x \in (0, \infty) \tag{9}$$

problemi için her bir $\lambda \in (0, \infty)$ sayısı bir özdeğerdir ve karşılık gelen gelen özfonksiyon $\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ dir. Buradan, düzgün problemle karşılaştıracak olursak, düzgün problem için spektrum daima ayrıktır. Halbu ki singüler problemler, bu örnekte olduğu gibi, sürekli sprektruma sahip olabilirler.