

İkinci Basamaktan Lineer Diferensiyel Denklemlerin Serisel Çözümleri

Bu bölümde çeşitli uygulamalarda karşımıza çıkan fakat elemanter fonksiyonlar yardımıyla çözülemeyen ikinci basamaktan lineer diferensiyel denklem

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad ((1))$$

sınıfı ele alınacaktır; burada p_0 , p_1 ve p_2 ortak çarpanları bulunmayan polinomlardır.

(1) denkleminin çözümleri genellikle elemanter fonksiyonlar cinsinden yani kapalı formda bulunamaz. Bu nedenle, (1) in serisel formda çözümleri aranır.

$p_0(x) \neq 0$ ise, x_0 noktasına (1) in bir adi noktası denir. $p_0(x) = 0$ ise, x_0 noktasına (1) in bir singüler noktası denir.

$p_0(x) = 0$ olsun.

$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{p_1(x)}{p_0(x)} \in R$ ve $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{p_2(x)}{p_0(x)} \in R$ ise o zaman x_0 singüler noktasında düzgün singüler nokta, aksi durumda düzgün olmayan singüler nokta denir.

Örnek:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

Legendre denklemi için $x_0 = 1$ ve $x_0 = -1$ singüler noktalarının düzgün olup olmadıklarına bakalım. $x_0 = 1$ için:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \frac{-2x}{1 - x^2} = 1 \in R$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2} = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} \in R$$

dir. O halde $x_0 = 1$ düzgün singüler noktadır. Benzer şekilde $x_0 = -1$ in de düzgün singüler nokta olduğu gösterilebilir.

Kuvvet Serisi Yöntemi

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad ((1))$$

denklemini ele alalım. Burada p_0 , p_1 , p_2 ortak çarpanları olmayan polinomlardır ve $p_0(x_0) \neq 0$ dir.

Teorem 1 : x_0 noktası (1) denkleminin bir adi noktası olsun. Bu durumda (1) in her çözümü $x_0 - R < x < x_0 + R$ aralığında yakınsak olan

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (2)$$

kuvvet serisi ile gösterilebilir. Başka bir ifadeyle (1) in genel çözümü

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \equiv a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

dir. Burada a_0 ve a_1 keyfi sabitler olup R sayısı x_0 dan p_0 in en yakın sıfırma olan uzaklıktır.

Örnek: $(1 + 2x^2)y'' + 6xy' + 2y = 0$ denkleminin genel çözümünü x in kuvvetleri cinsinden yazınız.

Çözüm: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formunda çözüm aranır ve denklem düzenlenirse

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)^2 a_0 \right] x^n \equiv 0$$

elde edilir. Buradan

$$a_{n+2} = -\frac{2(n+1)}{(n+2)a_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

genel indirgeme formülü elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{n!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n n!}{3.5.7 \dots (2n+1)} x^{2n+1} \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\prod_{j=1}^n (2j-1)}{n!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n n!}{\prod_{j=1}^n (2j+1)} x^{2n+1} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\prod_{j=1}^0 b_j = 1$, her b_j için olduğu kabul edilmiştir.

Örnek: $y'' - (x-1)y' + 2y = 0$ denkleminin genel çözümünü $x_0 = 2$ noktası civarında hesaplayınız.

Çözüm: $t = x - 2$ dersek, verilen denklem,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - t \frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

şeklini alır. Bu durumda $x_0 = 2$ adi noktası yani deklme için $t_0 = 0$ halini almıştır ve

$$y(t) = a_0 (1 - t^2) + a_1 \left(t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2.4.6 \dots 2n(2n-1)(2n+1)} t^{2n+1} \right)$$

elde edilir. Buradan da t yerine $x - 2$ alınırsa verilen deklemin genel çözümü

$$y(x) = a_0 \left[1 - (x - 2)^2 \right] + \left[x - 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 2)^{2n+1}}{2.4.6.\dots.2n.(2n - 1)(2n + 1)} \right]$$

şeklinde elde edilir.

Taylor Serisi Yöntemi

Denklemini çözmek için

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (3)$$

Taylor açılımını kullandığımızda, $y(x_0)$ ve $y'(x_0)$ değerleri başlangıç değerleri ile verilmektedir. Diğerleri yani

$$y^{(n)}(x_0), \quad n = 2, 3, \dots$$

değerleri diferensiyel denklemden ardışık türevlerle elde edilirler.

Örnek:

$$y'' + xy' + (2x - 1)y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = -2$$

başlangıç değer probleminin çözümünü Taylor yöntemi ile hesaplayınız.

Çözüm: $x_0 = -1, y(-1) = 2, y'(-1) = -2$

$$\begin{aligned} y'' &= -xy' - (2x - 1)y \implies y''(-1) = 4, \\ y''' &= -2xy' - xy'' - 2y \implies y'''(-1) = -4 \end{aligned}$$

dır. Bu şekilde devam edilirse,

$$\begin{aligned} y^{(4)}(-1) &= 8, \\ y^{(5)}(-1) &= -16, \\ y^{(6)}(-1) &= 8, \\ &\vdots \end{aligned}$$

bulunur. Yerlerine koyulduklarında çözüm

$$y(x) = 2 - 2(x + 1) + 2(x + 1)^2 - \frac{2}{3}(x + 1)^3 + \frac{1}{3}(x + 1)^4 + \dots$$

olarak elde edilir.

Homogen Olmayan Denklemler için Serisel Yöntem

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = \phi(x) \quad ((4))$$

denklemini verilsin. Burada $p_0(x)$, $p_1(x)$ ve $p_2(x)$, (1) deki gibi ortak çarpanları olmayan polinomlar olsunlar. $p_0(x_0) \neq 0$ olsun. $\phi(x)$ de bir polinom veya x_0

da Taylor serisine açılabilen bir fonksiyon olsun. (4) ün x_0 noktası civarındaki genel çözümü, $y = y_h + y_p$ dir. Burada y_h homogen denklemin genel çözümü, y_p de (4) denkleminin bir özel çözümüdür. Bu özel çözüm parametrelerin değişimi yöntemi yardımıyla hesaplanabilir. Alternatif olarak, $\phi(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında Taylor serisine açıldıktan sonra kuvvet serisi yöntemi doğrudan (4) denkleminine uygulanabilir. Bulunan özdeşlikten iki taraftaki $(x - x_0)^n$ terimlerinin katsayıları eşitlenir.

Örnek:

$$y'' - 2x^2y' + 4xy = x^2 + 2x + 2$$

denkleminin genel çözümünü x in kuvvetleri cinsinden hesaplayınız.

Çözüm: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ yazıldığında

$$\begin{aligned} a_2 &= 1, \quad a_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a_0, \quad a_4 = \frac{1}{12} - \frac{a_1}{6}, \\ 0 &= a_5 = a_8 = a_{11} = \dots = a_{3n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \\ a_{3n} &= \frac{2^{n-1} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-5)}{6 \cdot 9 \cdot 12 \dots (3n) \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \dots (3n-1)} a_3, \quad n = 2, 3, \dots \\ a_{3n+1} &= \frac{2^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-4)}{7 \cdot 10 \cdot 13 \dots (3n+1) \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \dots (3n)} a_4, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

bulunur. Verilen homogen olmayan denklemin genel çözümü:

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \sum_{n=2}^{\infty} [a_{3n-1}x^{3n-1} + a_{3n}x^{3n} + a_{3n+1}x^{3n+1}]$$

şeklinde yazılır.