HAFTA 3

REGRESYON MODELLERİNİN FONKSİYON KALIPLARI:

Şimdiye kadar anlatılan regresyon modelleri:

- Basit doğrusal model
- Orijinden geçen doğrusal model
- Çoklu regresyon modeli

Her zaman regresyon modeli doğrusal olmayabilir. Katsayılarda doğrusal olan ya da değişkenlerin uygun dönüşümleriyle doğrusallaşabilen bazı yaygın modeller:

- Log-doğrusal modeller
- Yarı-logaritmik modeller
- Ters modeller

Esneklik: Açıklanan değişken Y 'nin açıklayıcı değişken X 'e göre esnekliği; X 'deki küçük bir yüzde değişimin Y 'de meydana getirdiği yüzde değişimidir. Esneklik:

- Nokta esneklik
- Ortalamaya göre esneklik

olarak incelenebilir.

1. <u>Basit doğrusal regresyon modeli</u>: $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ için

- nokta esneklik $= \dfrac{\partial Y}{\partial x} . \dfrac{x_i}{Y_i} = \beta_1 \dfrac{x}{Y}; \quad i = 1, 2, \ldots, n$
- ortalamaya göre esneklik $= \beta_1 \dfrac{\overline{x}}{\overline{Y}}$
- herhangi bir zaman kesitinde alınan veriler düşünülürse t zaman kesitinde esneklik
  $\dfrac{(Y_t - Y_{t-1})}{(X_t - X_{t-1})} \dfrac{X_t}{Y_t} = \dfrac{(Y_t - Y_{t-1}) / Y_t}{(X_t - X_{t-1}) / X_t}$
  Y 'deki göreli değişimi ya da oransal değişimi verir.
  Göreli değişim*100=yüzde değişimi verir.
  a) Mutlak değişme $= X_t - X_{t-1}$
  b) Göreli ya da oransal değişme $= \dfrac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}$
  c) Yüzde değişme ya da yüzde büyüme oranı $= \dfrac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} * 100$

Bu üç farklı değişim X 'deki değişimleri vermektedir. X_t ve X_{t-1}, X değişkeninin sırasıyla t ve $t-1$ zamanındaki değerleridir.

2. <u>Çoklu regresyon modeli</u>: $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon$ için

- nokta esneklik $= \dfrac{\partial Y}{\partial x_j} . \dfrac{x_{ij}}{Y_i}; \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, k$

- ortalamaya göre esneklik$= \beta_j \dfrac{\overline{x}_j}{\overline{Y}}; \quad j = 1, 2, \ldots, k$

➢ **Log-doğrusal modeller:**

Üstel regresyon modeli: $Y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} e^{\varepsilon_i} \quad \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, n$

Y 'nin doğal logaritması alınırsa;

$$\underbrace{lnY_i}_{Y_i^*} = \underbrace{ln\beta_0}_{\beta_0^*} + \beta_1 \underbrace{lnX_i}_{X_i^*} + \varepsilon_i \Rightarrow Y_i^* = \beta_0^* + \beta_1 X_i^* + \varepsilon_i$$

doğrusal modele dönüşür. Böyle dönüşümler sonucunda doğrusal model haline dönüşebilen modellere *log-log, çifte-log* ya da *log-doğrusal* modeller denir. Log-log modelinin yaygın kullanılmasına yol açması eğim katsayısının Y 'nin X 'e göre esnekliğini vermesidir.

Örneğin; Y = bir mala olan talep
X = bu malın birim fiyatı

olmak üzere Y ve X arasındaki doğrusal regresyon modelindeki eğim katsayısı β_1 talebin fiyat esnekliğini ölçer.

➢ **Yarı-logaritmik modeller:** $\begin{cases} \text{Log-doğ} \\ Doğ - \text{log} \end{cases}$

İktisatçılar, işletmeciler, kamu yöneticileri sık sık nüfus, gayrisafi ulusal ürün (GSUÜ), para arzı, istihdam, verimlilik, dış ticaret açığı gibi değişkenlerin büyüme oranlarının bulunmasıyla ilgilenir.

Y ve X değişkenlerinden biri aritmetik seri, diğeri ise geometrik seri özelliğini taşıyorsa bu tip modeller kullanılır.

$$\left.\begin{array}{l} Y = \text{geometrik seri} \\ X = \text{aritmetik seri} \end{array}\right\} \Rightarrow Y = \beta_0 \beta_1^X$$

$\underbrace{lnY}_{Y^*} = \underbrace{ln\beta_0}_{\beta_0^*} + \underbrace{ln\beta_1}_{\beta_1^*} X \Rightarrow Y^* = \beta_0^* + \beta_1^* X + \varepsilon$ doğrusal model haline dönüşür.

Örneğin;

$$\left.\begin{array}{l} t = \text{ zaman} \\ r = \text{büyüme oranı} \\ Y_0 = \text{başlangıç kapitali} \end{array}\right\} \quad \text{Büyüme modeli: } Y_t = Y_0 (1+r)^t$$

$$\Rightarrow \underbrace{lnY_t}_{Y_t^*} = \underbrace{\ln Y_0}_{\beta_0} + \underbrace{ln(1+r)}_{\beta_1} t$$

$$\Rightarrow lnY_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

tipindeki modellere *yarı-logaritmik modeller* denir. Sadece açıklanan değişken üzerinde logaritmik dönüşüm yapılıyorsa, modele *log-dog modeli*; sadece açıklayıcı değişkenin logaritmik dönüşümü yapılıyorsa modele *doğ-log modeli* denir.

Bu tür modellerde X 'deki mutlak değişime karşılık Y 'deki oransal ya da göreli değişmeyi eğim katsayısı ölçer.

$$\frac{dlnY}{dt} = \underset{\frac{dY}{dX}\frac{1}{Y}}{\beta_1} = \frac{\text{Açıklanan değişkendeki göreli değişim}}{\text{Açıklayıcı değişkendeki mutlak değişim}}$$

Y ve X 'deki küçük değişmeler için bu ilişki yaklaşık $\frac{(Y_t - Y_{t-1})/Y_{t-1}}{(X_t - X_{t-1})}$.

Y 'deki göreli değişmeyi 100 ile çarparsak, β_1 açıklayıcı değişken X 'deki mutlak değişmeye karşılık Y 'deki % değişmeyi ya da büyüme oranını verecektir.

$$Y\text{'deki}\begin{cases}\text{sabit göreli} & = \beta_1 \quad \text{ya da sabit yüzde} = 100 * \beta_1 \\ \text{büyüme hızı} & \beta_1 > 0 \\ \text{küçülme hızı} & \beta_1 < 0\end{cases}$$

gösterir. Bu nedenle bu tip modellere *(sabit) büyüme modelleri* denir.

- **Ters modeller:**

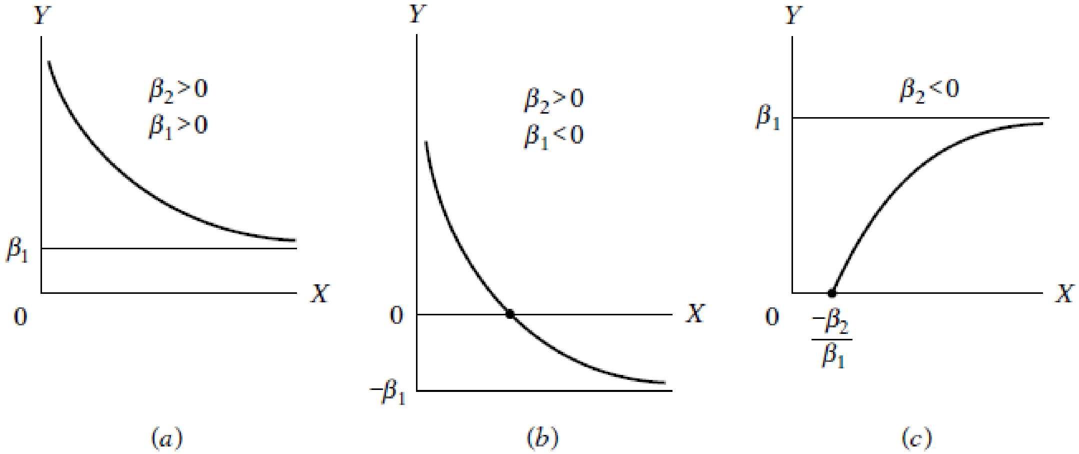
$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_i} + \varepsilon_i$$

türünde olan modellere *ters modeller* denir. Bu model, X 'in modele ters ya da 1 bölü olarak girmesi nedeniyle X değişkeninde doğrusal değildir ama β_0 ve β_1 regresyon katsayılarında doğrusaldır. Bu nedenle de doğrusal bir regresyon modelidir. Bu modelin iki özelliği:

$$X \to \infty \quad \Rightarrow \quad \beta_1 \frac{1}{X} \to 0$$

$$Y \to \beta_0 \quad \text{asimtotik değerine yakınsar.}$$

Bu tip modellerde X değişkeninin değeri sonsuza doğru büyürken Y değişkeni de bir limit ya da asimptotik değere yaklaşır.



Phillips eğrisi Engel'in harcama eğrisi

Eğer $X_i^* = \frac{1}{X_i}$ olarak alınırsa, $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i^* + \varepsilon_i$ doğrusal modeli olur. Eğer bu modelin eğimi $\frac{dY}{dX} = -\beta_1 \frac{1}{X^2}$ dir. β_1 pozitif ise eğim her noktada negatif, β_1 negatif ise eğim her noktada pozitif olur.

Örnek: İngiltere'de Phillips eğrisi, 1950-1966

$Y =$ 1950-1966 dönemi için İngiltere'deki ücret değişmeleri

$X =$ işsizlik oranı

Ters model: $\hat{Y}_i = -1.4282 + 8.2743 \frac{1}{X_i}$

$r^2 = 0.3849 \quad F_{1,15} = 9.39$

Açıkça anlaşılacağı üzere ücret tabanı yüzde -1.43, yani X sonsuza doğru büyüdükçe ücretlerdeki yüzde düşüş yılda yüzde 1.43'den çok olamaz (2. grafik). 3. grafik ise Engel'in harcama eğrisi, gelir ne olursa olsun belli bir noktadan sonra harcama yapılmıyor. Eşik değerinin yani $-\frac{\beta_1}{\beta_0}$ altında harcama yapılmıyor.

Fonksiyon kalıplarının özeti:

Model	Eşitlik	Eğim $\left(\frac{dY}{dX}\right)$	Esneklik $\left(\frac{dY}{dX}\frac{X}{Y}\right)$
Doğrusal	$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$	β_1	$\beta_1 \left(\frac{X}{Y}\right)$ *
Log-doğrusal ya da log-log	$lnY = \beta_0 + \beta_1 lnX + \varepsilon$	$\beta_1 \left(\frac{Y}{X}\right)$	β_1
Log-doğ	$lnY = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$	$\beta_1 (Y)$	$\beta_1 (X)$ *
Doğ-log	$lnY = \beta_0 + \beta_1 lnX + \varepsilon$	$\beta_1 \left(\frac{1}{X}\right)$	$\beta_1 \left(\frac{1}{Y}\right)$ *

Ters	$Y=\beta_0+\beta_1\dfrac{1}{X}+\varepsilon$	$-\beta_1\left(\dfrac{1}{X^2}\right)$	$-\beta_1\left(\dfrac{1}{XY}\right)$ *

Not: * esneklik katsayısının X ’e ya da Y ’ye ya da her ikisine birden bağlı olarak değiştiğini gösterir. Uygulamada X , Y değerleri belirtilmezse, bu esneklikler $\bar{X}$, $\bar{Y}$ ortalama değerleri üzerinden ölçülür.