## HAFTA 8

### 3. Breusch - Pagan - Godfrey sınaması:

Goldfeld-Quandt sınamasının başarısı sadece $c$ sabitine değil aynı zamanda gözlemleri sıralamada kullanılacak doğru $X$ değerinin seçimine bağlıdır. Bu sakınca Breusch-Pagan-Godfrey (BPG) sınamasıyla giderilebilir. BPG sınaması için

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

çoklu regresyon modeli alınırsa, hata varyansı $\sigma_i^2$ de

$$\sigma_i^2 = f\left(\alpha_0 + \alpha_1 z_{1i} + \cdots + \alpha_m z_{mi}\right)$$

yani $\sigma_i^2$ olasılıklı olmayan $z$ değişkenlerinin bir fonksiyonudur. Eğer $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ ise $\sigma_i^2 = \alpha_0$ olur ve buda sabittir. Öyleyse

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$$

hipotezi red edilir.

**1.Adım:** $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i$ modelinden $\hat{\varepsilon}_i$ artıkları bulunur.

**2.Adım:** Bu artıklardan $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2$ değeri bulunur. Hatırlanacağı üzere $\tilde{\sigma}^2$, $\sigma^2$'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi (MLE) dir. $k$ açıklayıcı değişken sayısını göstermek üzere en küçük kareler (EKK) tahmin edicisi ise $S^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2$ dir.

**3.Adım:** $P_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{\tilde{\sigma}^2}$; $i = 1, 2, \ldots, n$ değerleri tanımlanır.

**4.Adım:** Bu $P_i$ değerlerinin $z$'ler üzerinde regresyon modeli aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$P_i = \alpha_0 + \alpha_1 z_{1i} + \alpha_2 z_{2i} + \cdots + \alpha_m z_{mi} + v_i$$

**5.Adım:** $P_i$ regresyon modelinden $\hat{v}_i$ artıkları bulunur ve bu artıklardan $SSE_p$ bulunur. Daha sonra test istatistiği olarak tanımlanan

$$\theta = \frac{1}{2} SSE_p$$

$v_i$'lerin normal dağıldığı varsayımı altında asimptotik olarak $m$ serbestlik dereceli $\chi^2$ dağılımına sahiptir. Yani;

$$\theta = \frac{1}{2} SSE_p \sim \chi_m^2$$

$\theta > \chi_m^2(\alpha)$ ise sabit varyans varsayımı reddedilir.

**Örnek:** Gujarati'nin Temel Ekonometri kitabının 376. sayfasındaki veriler göz önüne alındığında $Y$'nin $X$ üzerine regresyon kestirim modeli

**1.Adım:** $$\hat{Y}_i = 9.2903 + 0.6378 x_i$$

Std. hata 5.2314 0.0286

$$SSE = 2361.153, \quad R^2 = 0.9466, \quad n = 30$$

**2.Adım:** $$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 = \frac{1}{30}(2361.153) = 78.7051$$

**3.Adım:** $$P_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{\tilde{\sigma}^2} = \frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{78.7051}; \quad i = 1, 2, \ldots, 30$$

**4.Adım:** $P_i$'lerin $X_i$ lere ( $z_i$'ler yerine $X_i$'ler kullanılır) doğrusal bağlı oldukları varsayımı altında $P$'nin kestirim modeli

$$\hat{P}_i = -0.7426 + 0.0101 x_i$$

Std. hata 0.7529 0.0041

$$SSE_p = 10.4280 \quad R^2 = 0.18$$

**5.Adım:** $$\theta = \frac{1}{2}SSE_p = \frac{1}{2}(10.4280) = 5.2140$$

BPG sınaması varsayımları altında $\theta \underset{n\to\infty}{\sim} \chi_1^2$ dağılımına sahiptir.

$\alpha = 0.05$ için $\chi_1^2(0.05) = 3.8414$
$\alpha = 0.01$ için $\chi_1^2(0.01) = 6.6349$

$\chi_1^2(0.05) = 3.8414 < \theta = 5.214 < \chi_1^2(0.01) = 6.6349$ olduğundan gözlenen ki-kare değeri %5 anlamlılık düzeyinde anlamlı ancak %1 anlamlılık düzeyinde anlamlı değildir.

BPG sınaması Goldfeld-Quandt sınaması ile aynı sonuca vardı. BPG sınaması büyük örneklem sınamasıdır. Bu sınama küçük örneklemlerde $\varepsilon_i$ hata teriminin normal dağıldığı varsayımı altında kullanılır. Küçük örneklemlerde normallik sınaması sonucuna göre değişen varyans sınaması BPG ile yapılabilir.

### 4. White genel değişen varyans sınaması:

Gözlemleri değişen varyansa yol açtığı düşünülen $X$ değişkenine göre yeniden sıraya sokulan Goldfeld-Quandt sınamasından ya da normallik varsayımına karşı duyarlı olan BPG sınamasından farklı olarak White'ın önerdiği genel değişen varyans sınaması normallik varsayımına dayanmadığı gibi uygulanması da kolaydır.

İki değişkenli regresyon modeli alınırsa;

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

**1.Adım:** Verilen regresyon modelinin kestirim modelinden artıklar $\hat{\varepsilon}_i$ 'ler bulunur.

**2.Adım:** Daha sonra $\hat{\varepsilon}_i^2$ için aşağıda verilen regresyon modeli bulunur.

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{1i}^2 + \alpha_4 X_{2i}^2 + \alpha_5 X_{1i} X_{2i} + v_i$$

$p =$ parametre sayısı

Bu modelin $R^2$ değeri bulunur.

**3.Adım:** $H_0$ : Değişen varyans yoktur.

hipotezi altında asimptotik olarak $sd =$ serbestlik derecesi olmak üzere $nR^2 > \chi^2_{sd}$ dağılımına sahiptir.

**4.Adım:** $\alpha$ anlamlılık düzeyi için;

eğer $nR^2 > \chi^2_{sd}(\alpha)$ ise değişen varyans vardır sonucuna varılır.

eğer $nR^2 \le \chi^2_{sd}(\alpha)$ ise değişen varyans yoktur sonucuna varılır. Bu da $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ olduğu sonucunu verir.

**Örnek:** $Y =$ dış ticaret verilerinin (dış alım-dış satım vergilerinin) toplam kamu gelirlerine oranı

$X_1 =$ dış alım ve dış satım toplamının GSUÜ (gayri safi ulusal ürün)'ye oranı

$X_2 =$ kişi başına düşen GSUÜ

olmak üzere

**Varsayımlar:** $Y$ ile $X_1$ aynı yönlü ilişkili (dış ticaret hacmi arttıkça, dış ticaret vergileri de artar)

$Y$ ile $X_2$ ters yönlü ilişkili (gelir arttıkça, hükümet dış ticaret vergisine güvenmek yerine gelir vergisi gibi doğrudan vergileri daha kolay toplar)

Stephen Lewis 41 ülkenin kesit verileri kullanarak aşağıda verilen regresyon modelini almıştır.

$$lnY_i = \beta_0 + \beta_1 lnX_{1i} + \beta_2 lnX_{2i} + \varepsilon_i$$

Önemli olan verilerde değişen varyans olup olmadığıdır. Veriler tekdüze olmayan ülkelerin kesit verisi olduğundan hata varyansının önsel olarak değişmesi beklenir. Yukarıdaki modelin kestirim modelinden $\hat{\varepsilon}_i$ artıkları bulunur ve White değişen varyans sınaması uygulanır.

Kestirim modeli:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = -5.8417 + 2.5629 ln(\text{ticaret})_i + 0.6918 ln(\text{GSUÜ})_i - 0.4081\left[ln(\text{ticaret})_i\right]^2$$
$$-0.0491\left[ln(\text{GSUÜ})_i\right]^2 + 0.0015\left[ln(\text{ticaret})_i\right]\left[ln(\text{GSUÜ})_i\right]$$

$R^2 = 0.1148$ ve $n = 41$

Buradan; $nR^2 = 41(0.1148) = 4.7068$ ve $sd = 5$ bulunur.

$\alpha = 0.05$ için $\chi^2_{5\,(0.05)} = 11.0705$

$\alpha = 0.10$ için $\chi^2_{5\,(0.10)} = 9.233$

$\alpha = 0.25$ için $\chi^2_{5\,(0.25)} = 6.62568$

$$nR^2 = 4.7068 < \text{Tablo değerleri}$$

olduğundan $\alpha = 0.05,\ 0.10$ ve $0.25$ anlamlılık düzeylerine göre değişen varyans olmadığı söylenebilir.

Bu sınamada dikkat edilmesi gereken durumlar olabilir. Bazen ikili çarpım terimleri modelden dışlanabilir. Test istatistiğinin anlamlı çıktığı bazı durumlarda bunun nedeni değişen varyans değil, model kurma hataları olabilir. Yani, White genel değişen varyans sınaması yalnız değişen varyans değil model kurma ya da her ikisi için bir sınama olabilir.

## 5. Bartlett tekdüze varyans sınaması:

$k$ farklı grup $N\left(\mu,\sigma_i^2\right)$ $i=1,2,\ldots,k$ olan normal dağılımdan gelmiş olsun. $S_1^2, S_2^2,\ldots,S_k^2$ bu $k$ gruptan elde edilen örneklem varyanslarını göstermek üzere $n_i = i.$ gruptaki gözlem sayısı ve $f_i = n_i - 1$ olsun.

**1.Adım:** Her örneklem varyansının aynı ana kitle varyansı $\sigma^2$'nin birer tahmin edicisi olduğunu test etmek için

$$H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 = \sigma^2 \quad \text{(değişen varyans yoktur)}$$

hipotezi tanımlanır. $H_0$ hipotezinin doğruluğu altında

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(n_i-1\right)S_i^2}{\sum_{i=1}^{k}\left(n_i-1\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i S_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i S_i^2}{f}$$

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i \Rightarrow f = \sum_{i=1}^{k} f_i = \sum_{i=1}^{k}(n_i-1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k$$

tanımlanır ve $S^2$, $\sigma^2$'nin bir tahmin edicisidir.

**2.Adım:** Test istatistiği:

$$\chi_H^2 = \frac{f\ lnS^2 - \sum_{i=1}^{k}\left(f_i lnS_i^2\right)}{1+\frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{f_i}\right)-\frac{1}{f}\right]} \sim \chi_{k-1}^2 \text{ dır.}$$

Bartlett $\chi_H^2$ istatistiğinin serbestlik derecesi $sd = k-1$ ile $\chi^2$ dağıldığını göstermiştir.

**3.Adım:** Eğer $\chi_H^2 < \chi_{k-1(\alpha)}^2$ ise $H_0$ hipotezi red edilemedi. Yani, değişen varyans yoktur sonucunu verir.

**Öbür değişen varyans sınamaları:**

Herbiri belli varsayımlara dayanan çeşitli değişen varyans sınamaları vardır.