HAFTA 9

Düzeltici önlemler:

Değişen varyans EKK tahmin edicilerinin sapmasızlık (yansızlık), tutarlılık özelliklerini bozmaz ama bu tahmin ediciler asimptotik (yani büyük örneklemlerde bile) olarak artık etkin değildirler. Etkinlik yoksunluğu bilinen önsav sınaması işlemlerini kuşkulu duruma sokar. Bu durumda düzeltici önlemlerin gerekli olduğu açıktır. Düzeltme yapmak içim iki düzeltme yaklaşımı

- σ_i^2 bilindiği
- σ_i^2 bilinmediği

durumlardır.

I. σ_i^2 biliniyorsa:

σ_i^2 biliniyorsa, değişen varyansı düzeltmenin en kolay yolu ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemidir. Bu yöntemle bulunan en küçük kareler tahmin edicileri BLUE (DESTE) dur.

Örnek: $Y =$ çalışan kişi başına yapılan ortalama ödeme ($)

$$X = \text{çalışan kişi başına işyeri büyüklüğü} = \begin{cases} \text{1-4 çalışan} & \Rightarrow 1 \\ \text{5-9 çalışan} & \Rightarrow 2 \\ \vdots & \Rightarrow \vdots \\ \text{1000-2499 çalışan} & \Rightarrow 9 \end{cases}$$

ile ölçülmüştür.

$\sigma_i =$ ücretlerin standart sapmaları

Y_i	X_i	σ_i	Y_i/σ_i	X_i/σ_i
3396	1	743.7	4.5664	0.0013
3787	2	851.4	4.4480	0.0023
4013	3	727.8	5.5139	0.0041
4104	4	805.06	5.0978	0.0050
4146	5	929.9	4.4585	0.0054
4241	6	1080.6	8.9247	0.0055
4387	7	1243.2	3.5288	0.0056
4538	8	1307.7	3.4702	0.0061
4843	9	1112.5	4.3532	0.0081

Model: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i; \quad i = 1, 2, \ldots, 9$

$$\underbrace{\frac{Y_i}{\sigma_i}}_{Y_i^*} = \underbrace{\beta_0\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)}_{\beta_0^*} + \beta_1\underbrace{\left(\frac{X_i}{\sigma_i}\right)}_{X_i^*} + \underbrace{\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right)}_{\varepsilon_i^*}$$

Ağırlıklandırılmış en küçük kareler kestirim modeli:

$$\hat{Y}_i^* = \hat{\beta}_0(1/\sigma_i) + \hat{\beta}_1 X_i^*$$

$$=3406.639\,(1/\sigma_i) + 154.153\, X_i^*$$

Std. hata:	80.983	16.959
t	42.066	9.090

$R^2 = 0.9993$

Ağırlıklandırılmadan bulunan en küçük kareler kestirim modeli:

$$\hat{Y}_i^* = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i^*$$

$$=3417.833 + 148.767\, X_i^*$$

Std. hata:	81.136	14.418
t	42.125	10.318

$R^2 = 0.9383$

Görüleceği üzere $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ her iki model için farklıdır. Ağırlıklandırılmış modelde açıklayıcı değişkenler $1/\sigma_i$ ve X_i/σ_i olarak iki değişkenli orijinden geçen regresyon modeli tahmin edilir.

II. σ_i^2 bilinmiyorsa:

σ_i^2 bilinmiyorsa BLUE tahmin edicilerini bulmak için ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi kullanılabilir. Gerçek σ_i^2 bilinmediği durumda değişen varyans varken bile EKK tahmin edicileri varyanslarının tutarlı tahminleri bulunabilir.

Değişen varyansla tutarlı White varyansları ve standart hataları:

White bu tutarlı tahmin edicileri asimptotik olarak geçerli istatistik çıkarsamalar yapılabilecek biçimde gerçekleştirilebileceğini göstermiştir. Bazı bilgisayar yazılımları EKK tahmin edicilerinin varyansları, standart hataları yanı sıra tutarlı White varyansları ve standart hatalarını da vermektedir.

Örnek: White sürecinin gösterimi:

William H. Greene'nin Econometric Analysis kitabından alına bir örnek

$Y =$ 1979 yılında eyaletlere göre kamu okullarına kişi başına yapılan harcama

$X =$ 1979 yılında eyaletlere göre kişi başına gelir

Veriler Amerika'daki 50 eyaleti ve Washington D.C.'yi içerir.

Kestirim modeli:

$$Y_i = 832.91 - 1834.2(\text{Gelir}) + 1587.04(\text{Gelir})^2$$

	$S_{\hat{\beta}}$:	327.3	829.01	519.10
	t :	2.54	2.21	3.06
White	$S_{\hat{\beta}}$:	460.9	1243.0	830.0
	t :	1.81	-1.48	1.91

Yorum: Yukarıdaki sonuçlara bakılırsa White değişen varyansa göre düzeltilmiş standart hataların EKK standart hatalarından daha büyüktür. Dolayısıyla tahmin edilen test istatistikleri EKK ile bulunan $t-$ değerlerinden daha küçüktür. White ve EKK ile veri kümesinde değişen varyansın ciddi bir soru olup olmadığına bakılabilir. %5 anlam düzeyinde EKK'ya göre her iki açıklayıcı değişken istatistiksel anlamlı iken White tahmin edicilerine göre istatistiksel anlamlı değildir.

Değişen varyansın yapısına ilişkin akla uygun varsayımlar:

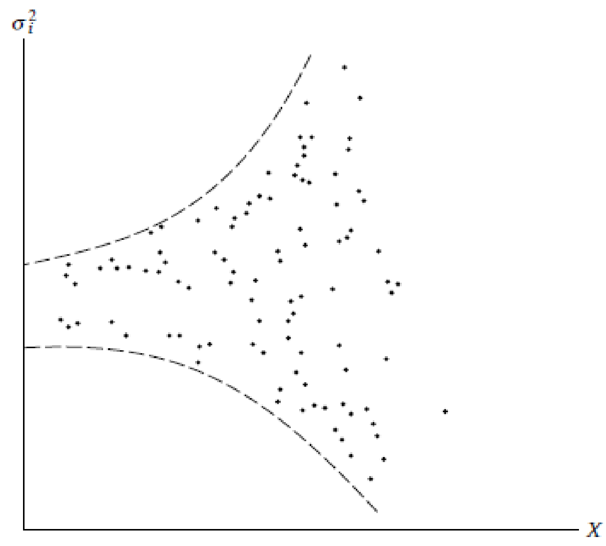
White sürecinin büyük örneklem süreci olmasının yanı sıra bir başka sakıncası da tahmin edicilerinin veri dönüşüm yöntemleriyle elde edilen tahmin ediciler kadar etkin olamamasıdır. Bunu açıklamak için

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

basit doğrusal modeli ele alınırsa, değişen varyansa ilişkin varsayımlar:

1. Hata varyansı X_i^2 ile doğru orantılıdır.

$Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 X_i^2$



$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$

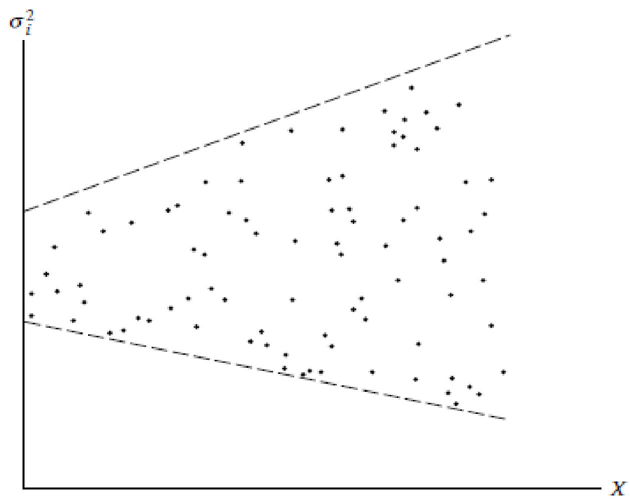
$$\underbrace{\frac{Y_i}{X_i}}_{Y_i^*} = \beta_0 \frac{1}{X_i} + \beta_1 + \underbrace{\frac{\varepsilon_i}{X_i}}_{\varepsilon_i^*} \quad \Rightarrow \quad Y_i^* = \beta_0 \frac{1}{X_i} + \beta_1 + \varepsilon_i^*$$

$$Var(\varepsilon_i^*) = Var\left(\frac{\varepsilon_i}{X_i}\right) = \frac{1}{X_i^2} Var(\varepsilon_i) = \frac{1}{X_i^2}\sigma^2 X_i^2 = \sigma^2 \quad \text{sabitlenir.}$$

ε_i^* sabit varyanslı hata terimleri $\frac{Y_i}{X_i}$ ile $\frac{1}{X_i}$ arasındaki regresyon modeli bulunur.

2. Karekök dönüştürmesi: Hata varyansı X_i ile doğru orantılıdır.

$Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 X_i$



$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$

$$\underbrace{\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}}}_{Y_i^*}=\beta_0\frac{1}{\sqrt{X_i}}+\beta_1\frac{X_i}{\sqrt{X_i}}+\underbrace{\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i}}}_{\varepsilon_i^*} \Rightarrow Y_i^*=\beta_0\frac{1}{\sqrt{X_i}}+\beta_1\sqrt{X_i}+\varepsilon_i^*$$

Burada $\varepsilon_i^*=\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i}}$ ve $X_i>0$'dır.

$$Var(\varepsilon_i^*)=Var\left(\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i}}\right)=\frac{1}{X_i}Var(\varepsilon_i)=\frac{1}{X_i}\sigma^2X_i=\sigma^2 \text{ sabitlenir.}$$

Burada ε_i^* sabit varyanslı hata terimleri $\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}}$'nın $\frac{1}{\sqrt{X_i}}$ ve $\sqrt{X_i}$ arasındaki orijinden geçen regresyon modeli ile bulunur.

3. Hata varyansı Y_i'nin ortalama değerinin karesiyle doğru orantılıdır.

$Var(\varepsilon_i)=\sigma^2\{E(Y_i)\}^2$ ve $E(Y_i)=\beta_0+\beta_1X_i$

$Y_i=\beta_0+\beta_1X_i+\varepsilon_i$

$$\underbrace{\frac{Y_i}{E(Y_i)}}_{Y_i^*}=\beta_0\frac{1}{E(Y_i)}+\beta_1\underbrace{\frac{X_i}{E(Y_i)}}_{X_i^*}+\underbrace{\frac{\varepsilon_i}{E(Y_i)}}_{\varepsilon_i^*} \Rightarrow Y_i^*=\beta_0\frac{1}{E(Y_i)}+\beta_1X_i^*+\varepsilon_i^*$$

$$Var(\varepsilon_i^*)=Var\left(\frac{\varepsilon_i}{E(Y_i)}\right)=\frac{1}{\{E(Y_i)\}^2}Var(\varepsilon_i)=\frac{1}{\{E(Y_i)\}^2}\sigma^2\{E(Y_i)\}^2=\sigma^2 \text{ sabitlenir.}$$

Burada $E(Y_i)$ bilinmediği için bu dönüşüm uygulanabilir değildir. $E(Y_i)$'nin bir tahmin edicisi $\hat{Y}_i$ olduğuna göre Y_i'nin X_i üzerine kestirim modeli bulunarak $\hat{Y}_i$ elde edilir. Sonra bu dönüşüm

$$\underbrace{\frac{Y_i}{\hat{Y}_i}}_{Y_i^*}=\beta_0\frac{1}{\hat{Y}_i}+\beta_1\underbrace{\frac{X_i}{\hat{Y}_i}}_{X_i^*}+\underbrace{\frac{\varepsilon_i}{\hat{Y}_i}}_{\varepsilon_i^*}$$

uygulanır. $\hat{Y}_i$'lar her ne kadar $E(Y_i)$'ye tam tamına eşit olmasa da tutarlı tahmin edicilerdir. Sonuç olarak

$$\hat{Y}_i\xrightarrow[n\to\infty]{}E(Y_i)$$

olacağından, eğer örneklem yeterince büyük kabul edilirse uygulamada bu dönüşüm yeterince başarılı olur.

4. Log dönüştürmesi:

$lnY_i=\beta_0+\beta_1lnX_i+\varepsilon_i$

modeli değişen varyans sorununu

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$

modeline göre çoğu zaman daha düşüğe indirir. Bu sonucu doğuran neden *ln* (doğal logaritma) dönüştürmesinin iki değer arasındaki on katlık bir farkı iki kata indirmesidir.

Örneğin; 80 sayısı 8'in 10 katı iken $ln(80) = 4.328$ sayısı $ln(8) = 2.0794$ sayısının 2 katıdır.

log dönüştürmesinin bir başka yanı eğim katsayısı β_1'in, Y'nin X'e göre esnekliği olmasıdır. Yani X'deki %1'lik bir değişime karşı Y'de ortaya çıkan % değişimi gösterir.

Şimdiye kadar verilen dönüşümlerden hangisinin daha iyi olduğu değişen varyans sorunun ciddiliğine bağlıdır. Bu dönüşümlerle ilgili bazı sorunlar:

- Çoklu modelde dönüşüm için hangi X değişkeninin seçileceği önceden bilinemez.
- Eğer Y ve X değerlerinden bazıları sıfır ise *log* dönüşümü uygulanamaz.
- Bazen değişkenler ilişkisiz ya da rasgele bile olsalar bu değişkenlerin oranları arasında korelasyon bulunduğu durumları gösterir.

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ modelinde Y_i ile X_i ilişkisizken,

$\frac{Y_i}{X_i} = \beta_0 \frac{1}{X_i} + \beta_1 + \frac{\varepsilon_i}{X_i}$ modelinde $\frac{Y_i}{X_i}$ ile $\frac{1}{X_i}$ çoğu zaman ilişkili bulunur.

- σ_i^2 bilinmediğinde bir yolla tahmin edicileri bulunmuşsa, bütün test işlemleri büyük örneklemler için geçerlidir. Küçük örneklem ya da sonlu örneklem durumlarında dönüşüm yapılmış verilere dayanan istatistiki sonuç çıkarımların yorumlanmasında dikkat edilmelidir.

Özet ve sonuçlar:

1. Hata terimlerinin varyansının aynı ve sabit olması yani σ^2 olmasıdır. Bu varsayımın sağlanamaması değişen varyans olduğunun göstergesidir.
2. Değişen varyans EKK tahmin edicilerinin sapmasızlık (yansızlık) ve tutarlılık özelliklerini bozmaz.
3. Değişen varyans durumunda EKK tahmin edicileri artık en küçük varyansa sahip değiller, yani BLUE değillerdir.
4. Hata terimlerinin değişen varyansları σ_i^2'lerin bilinmesi durumunda ağırlıklı EKK tahmin edicileri BLUE'dur.
5. Değişen varyans varlığında EKK tahmin edicilerin varyansları bilinen EKK formülleriyle bulunamaz. EKK formülleri ile bulunan varyanslar kullanılarak elde edilen *t* ve *F* testleri yanlış sonuçlar verir.
6. Değişen varyansın doğurduğu sonuçları saymak, bu tanıyı koymaktan kolaydır.
7. Değişen varyans tespit edilse bile bu durumu düzeltmek kolay değildir. Örneklem büyükse, White standart hataları bulunup buna göre istatistiksel sonuçlar çıkarabilir.

8. Değişen varyansın olası örüntüsü kestirilerek buna uygun bir dönüşümle değişen varyans sorunu çözümlenebilir.

9. EKK hata terimleri değişen varyanslı olmakla birlikte ardışık bağımlı (otokorelasyonlu) olabilirler.