

HAFTA 10

ARDIŞIK BAĞIMLILIK (OTOKORELASYON)

Klasik regresyon analizinin önemli varsayımlarından biri de hata terimlerinin arasında ardışık bağımlılık (uncorrelated) olmasıdır. Bu varsayımın ihlal edildiği durumda, ardışık bağımlılığın

- Niteliği
- Doğurduğu sonuçlar
- Varlığının tespiti
- Sorunun çözümü

konularının incelenmesi gerekir. Hem değişen varyans hem de ardışık bağımlılığın varlığı durumunda EKK tahmin edicileri sapmasız olmalarına karşın BLUE (yani en küçük varyansa sahip) değildir.

Sorunun niteliği:

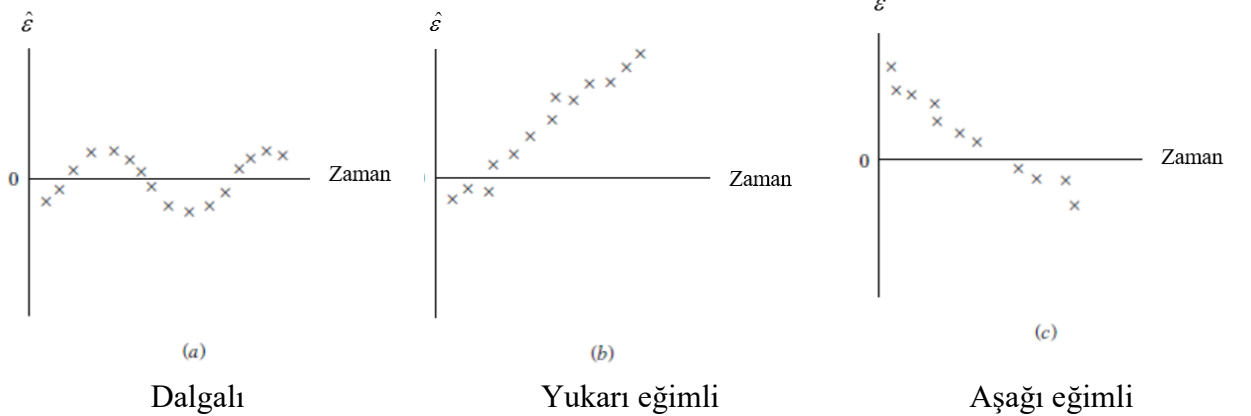
Ardışık bağımlılık terimi “zaman içinde ya da mekan içinde sıralanan gözlem dizilerinin birimleri arasındaki ilişkidir” anlamındadır. Hata terimleri arasında ardışık bağımlılığın olmaması demek, bütün $i \neq j$ çiftleri için

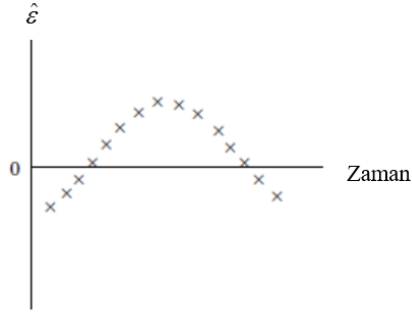
$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$$

dir. Kısaca, herhangi bir gözleme ilişkin hata teriminin etkilenmediğini varsayar. Ardışık bağımlılık (otokorelasyon) varsa, bütün $i \neq j$ çiftleri için

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) \neq 0$$

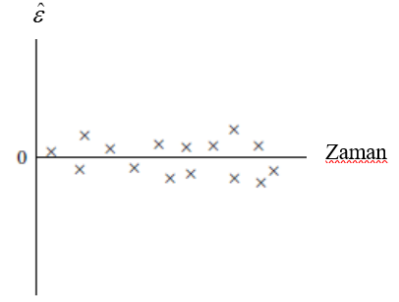
Ardışık bağımlılığın var olup olmadığını görüntüleyen çizimler





(d)

Hem doğrusal hem de ikinci dereceden eğilimli



(e)

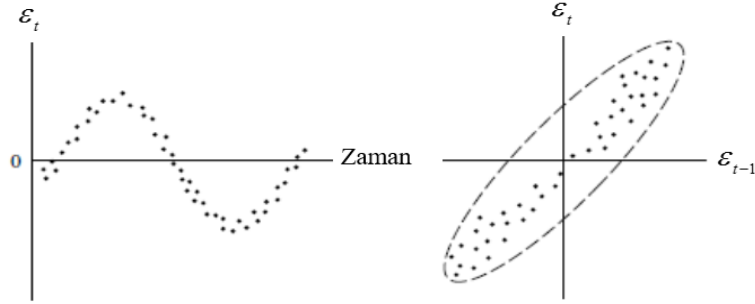
Hiçbir düzenli örüntü yok

Buradaki çizimlerden sadece (e)'de hiçbir düzenli örüntü yoktur, bu da klasik doğrusal regresyon modelinin ardışık bağımlılık yoktur varsayımını destekler.

Ardışık bağımlılığın ortaya çıkarma çıkma nedenleri:

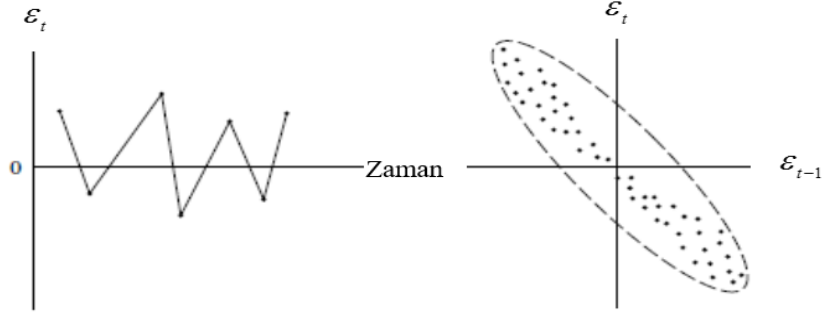
- Süredurum - Ağır hareketlilik
- Model kurma hatası - Dışlanmış değişkenler durumu
- Model kurma hatası - Yanlış fonksiyon kalıbı
- Örümcek ağı olgusu
- Gecikmeler
- Verilerle "oyunama"

Örneğin, üç aylık veriler kullanan zaman serisi regresyonlarında genellikle üç ayın verisinin ortalaması alınarak üçer aylık veriler türetilir. Veriler üzerinde diğer oynama yöntemleri, ara değer verme (interpolation) ya da dış değer verme (extrapolation) olabilir.



(a)

Aynı yönlü ardışık bağımlılık



(b)

Ters yönlü ardışık bağımlılık

Ardışık bağımlılığın varlığı altında EKK tahmini

Model: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$; t zaman

Bir başlangıç noktası ya da ilk yaklaştırma olarak hata terimlerinin

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t; \quad -1 < \rho < 1$$

modelinden türediği varsayılabilir.

ρ = ardışık ortak varyans katsayısı olmak üzere

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+s}) = 0; \quad s \neq 0$$

olsun. Bu model Markov birinci dereceden ardışık bağımlı dizin ya da birinci dereceden ardışık bağımlı dizin olarak adlandırılır ve genellikle AB (1) [AR(1)] ile gösterilir.

$\hat{\beta}_1$ eğim katsayısının EKK tahmin edicisi

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})(X_t - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t x_t}{\sum_{t=1}^n x_t^2}$$

$y_t = Y_t - \bar{Y}$
 $x_t = X_t - \bar{X}$

ve AB(1) dizini veriyken eğim katsayısının EKK tahmin edicisinin varyansı

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n x_t^2} \left[1 + 2 \left\{ \rho \frac{\sum_{t=1}^{n-1} x_t x_{t+1}}{\sum_{t=1}^n x_t^2} + \rho^2 \frac{\sum_{t=1}^{n-2} x_t x_{t+2}}{\sum_{t=1}^n x_t^2} + \dots + \rho^{n-1} \frac{x_1 x_n}{\sum_{t=1}^n x_t^2} \right\} \right]$$

Ardışık bağımlılığın olmadığı bilinen formül

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n x_t^2}$$

dir. Eğer $\rho = 0$ ise iki varyans formülü eşit olur. Ardışık bağımlılık olduğu durumda $\hat{\beta}_1$ tahmin edicisi artık BLUE değildir. Yani en küçük varyansa sahip değildir. Acaba otokorelasyon durumunda BLUE tahmin edicisi bulunabilir mi? **EVET.**

Ardışık bağımlılığın varlığı altında BLUE tahmin edicisi

$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$ modeli ve

$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$; AB (1) süreci varsayıldığında $\hat{\beta}_1$ için BLUE tahmin edicisi

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (x_t - \rho x_{t-1})(y_t - \rho y_{t-1})}{\sum_{t=2}^n (x_t - \rho x_{t-1})^2} + C$$

$C =$ uygulamada gözardı edilebilecek bir düzeltme terimidir.

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^n (x_t - \rho x_{t-1})^2} + D$$

$D =$ uygulamada gözardı edilebilecek bir düzeltme terimidir.

Görüleceği üzere değişen varyans sorununda olduğu gibi otokorelasyon sorununda da ağırlıklandırılmış EKK yöntemi ile BLUE tahmin edicileri elde edilebilir. Eğer $\rho = 0$ ise bilinen EKK ile ağırlıklandırılmış EKK tahmin edicileri aynı bulunacaktır.

Ardışık bağımlılığın varlığı altında EKK yöntemini kullanmanın sonuçları:

Değişen varyans durumunda olduğu gibi ardışık bağımlılık durumunda da EKK tahmin edicileri doğrusal sapmasız (yansız) aynı zamanda tutarlıdır ama artık etkin (en küçük varyanslı) değildir.

– *Ardışık bağımlılığı gözönüne alan EKK tahmini:*

Güven aralıkları saptanır, önsav sınavı yapılırken EKK tahmin edicilerin sapmasız ve tutarlı olmalarına karşın ağırlıklandırılmış EKK kullanılmalıdır.

– *Ardışık bağımlılığı gözardı eden EKK tahmini:*

$\hat{\beta}_1$ 'yi kullanmakla kalmayıp bir de ardışık bağımlılık sorunu bütünüyle göz ardı eden

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n x_t^2}$$

kullanılırsa, yani klasik modelin alışıldık varsayımlarının geçerli olduğuna

inanılırsa durum çok ciddiye kazanabilir.