HAFTA 12

Asimptotik ya da büyük örneklem sınaması:

n yeterince büyükse $\sqrt{n}\hat{\rho} \sim N(0,1)$ gösterilebilir.

$$H_0: \rho = 0$$

hipotezinin test edilmesinde $\sqrt{n}\hat{\rho}$ değeri red bölgesinde ise hipotez red edilir.

Örnek: $n = 32$ iken $\hat{\rho} = 0.8844 \Rightarrow \sqrt{32}(0.8844) = 5.003$ bulunu

$H_0: \rho = 0$ testinde H_0 hipotezi doğru ise asimptotik olarak 5 ya da daha yüksek bir değer bulma olasılığı son derece düşüktür. $\alpha = 0.05$ ise $z^*_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ tablo değerine göre Ho hipotezi red edilir.

Breusch-Godfrey (BG) sınaması:

Hata terimleri arasında daha yüksek dereceden ardışık bağımlılık olduğunda kullanılır. Yani,

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \cdots + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t; \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

ise

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_p = 0,$$

ardışık bağlanımlı bütün katsayıların aynı anda sıfıra eşit olduğu hipotezinin testinde

- EKK yöntemiyle hata terimleri $\hat{u}_t$ 'lar bulunur.
- $u_t = \underbrace{\alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \cdots + \alpha_k X_{kt}}_{\text{açıklayıcı değişkenler}} + \underbrace{\rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \cdots + \rho_p \hat{u}_{t-p}}_{\text{artıkların gecikmeli değerleri}} + \varepsilon_t$

  yan regresyonu bulunarak R^2 değeri bulunur.
- n yeterince büyükse $(n-p)R^2 \sim \chi^2_p$ dir
- $(n-p)R^2 > \chi^2_p(\alpha)$ ise H_0 red edilir.

BG sınaması için uygulamadaki yararlar:

1. Regresyon modelinin açıklayıcı değişkenleri arasında Y bağımlı değişkeninin Y_{t-1}, Y_{t-2} vb. gecikmeli değerleri bulunabilir.
2. Hata terimi p. dereceden bir hareketli ortalama sürecine uysa bile, yani hata terimleri u_t 'ler

   $$u_t = \varepsilon_t + \lambda_1 \varepsilon_{t-1} + \lambda_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \lambda_p \varepsilon_{t-p}; \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

   modelinden türese bile BG sınaması yine de uygulanabilir.
3. $p = 1$ yani 1. dereceden ardışık bağımlılık varsa BG sınaması *Durbin* m *sınaması* adını alır.
4. BG sınamasının bir sakıncası gecikme uzunluğu p 'nin önsel belirlenememesidir. p değerine ilişkin bazı denemeler yapılmalıdır.

Örnek: Ücret verimliliği regresyon modeli ele alınırsa BG sürecini izleyip yan regresyondaki EKK hatalarının beş gecikmeli değerini modele katalım. Yan regresyon ücretlerin verimliliğe ve bunun yanısıra ücretlerin yalnız verimliliğe göre regresyonundan bulunmuş hatalarının beş gecikmeli değerine göre bulunan regresyondur. Bu yan regresyonun $R^2 = 0.8660$ tır. İlk regresyonda 32 gözlem varken yan regresyonda kullanılan beş gecikmeli değerinden ötürü 27 gözlem kalmaktadır. Öyleyse $nR^2 = (27)(0.8660) = 23.382$ olup, $p = P(\chi^2 \geq 23.382) = 0.0003$ dir. Bu durumda $\hat{u}$ 'ların beş gecikmeli katsayısının hepsinin sıfıra eşit olduğunu söyleyen hipotez red edilir. Hiç olmazsa bir gecikmeli katsayısının birinin sıfırdan farklı olduğu söylenebilir. Daha önce hatalarda AB(1) ardışık bağımlılık bulunması şaşırtıcı olmamalıdır.

Ki-kare testi:

Durbin-Watson *d* testinin kararsız olduğu durumlarda kullanılır ve 1. dereceden otokorelasyon araştırılmasında kullanılmaz. Parametrik olmayan bir testtir.

		$\hat{u}_t$		
		+	–	Toplam
$\hat{u}_{t-1}$	+	a	b	$a+b$
	–	c	d	$c+d$
	Toplam	$a+c$	$b+d$	$n-1$

H_0 : Otokorelasyon yoktur

H_1 : Otokorelasyon vardır.

Hata terimlerinin işaretlerine bakarak bu tablo oluşturulur. Test istatistiği

$$\chi_t^2 = \frac{(ad-bc)^2(n-1)}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \sim \chi_1^2$$

$\chi_t^2 > \chi_1^2(\alpha)$ ise H_0 hipotezi red edilir. Otokorelasyon (ardışık bağımlılık) vardır.

Alternatif ardışık bağımlılık testleri:

- Durbin *H* testi
- Durbin Alternatif testi
- Von-Neumann Oran testi
- Wallis ve King testleri
- Berenblut- Webb testi
- Farebrother testi

Düzeltici Önlemler:

Ardışık bağımlılık varken EKK tahmin edicileri etkin olmadığından düzeltici önlemler alınmalıdır. Bu durumda hata terimleri arasındaki ardışık bağımlılığın niteliği konusunda bilgiye ihtiyaç duyulur.

– **Ardışık bağımlılığın yapısı biliniyorsa:**

– ρ **biliniyorsa:**

Hata terimleri gözlenemediğinden genellikle

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

modeline uyduğu varsayılır. $\varepsilon_t \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ ve $|\rho|<1$ dir. Eğer ρ biliniyorsa basit doğrusal regresyon modeli

$$\left.\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \\ \rho Y_{t-1} &= \rho\beta_0 + \rho\beta_1 X_{t-1} + \rho u_{t-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\left(Y_t - \rho Y_{t-1}\right)}_{Y_t^*} = \underbrace{\beta_0\left(1-\rho\right)}_{\beta_0^*} + \beta_1\underbrace{\left(X_t - \rho X_{t-1}\right)}_{X_t^*} + \underbrace{\left(u_t - \rho u_{t-1}\right)}_{\varepsilon_t}$$

$$Y_t = \beta_0^* + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t$$

modeline dönüşecektir. Bu modelde ρ bilindiği için bu modelin hata terimlerinde ardışık bağımlılık yoktur. O halde bu modelin EKK tahmin edicileri BLUE olacaktır. $\left(Y_t^*,\ X_t^*\right)$ arasındaki modele *genelleştirilmiş, fark ya da yaklaşık denklem* denir. Bu fark alma işlemiyle bir gözlem kaybolur. Bu kaybın önlenmesi için ilk değerlere $Y_1\sqrt{1-\rho^2}$ ve $X_1\sqrt{1-\rho^2}$ dönüşümleri uygulanır. Bu dönüştürmeye *Prais-Winston dönüştürmesi* denir.

– ρ **bilinmiyorsa:**

ρ'nun bilinmemesi durumunda tahmin edicisi bulunur.
Bunun için geliştirilen bazı yöntemler:

– **Birinci fark yöntemi:**

ρ, 0 ile ±1 arasında olduğundan iki uç noktadan başlanır. Bir uçta $\rho = 0$ ardışık bağımlılık yok, diğer uçta $\rho = \pm 1$ ters ya da aynı yönlü tam bir ardışık bağımlılık vardır. Verinin regresyon modeli bulunurken ardışık bağımlılık olmadığı varsayımı altında kestirim denklemi bulunup hata terimlerinin tahminleri (artıklar) elde edilir. Bu hata terimlerinin tahminlerinin ardışık bağımlı olup olmadıkları D-W *d* istatistiği veya başka bir sınama yöntemiyle test edilir. Eğer $\rho = \pm 1$ ise genelleştirilmiş fark denklemi

$$\underbrace{\left(Y_t - Y_{t-1}\right)}_{\Delta Y_t} = \beta_1\underbrace{\left(X_t - X_{t-1}\right)}_{\Delta X_t} + \varepsilon_t$$

olup *birinci fark denklemi* denir ve $\left(\Delta Y_t, \Delta X_t\right)$ arasında orijinden geçen regresyon denklemidir.
Eğer $\rho = -1$ ise genelleştirilmiş fark denklemi

$$Y_t + Y_{t-1} = 2\beta_0 + \beta_1\left(X_t + X_{t-1}\right) + \underbrace{u_t + u_{t-1}}_{\varepsilon_t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y_t + Y_{t-1}}{2} = \beta_0 + \beta_1 \frac{X_t + X_{t-1}}{2} + \frac{\varepsilon_t}{2}$$

üzerine regresyon modelidir ve *hareketli ortalama regresyonu* denir.
Uygulamada $\rho = +1$ alınması ekonometride yaygın kullanılır. Fakat burada hata terimlerinin aynı yönlü tam bağımlı varsayıldığına dikkat edilmelidir.
ρ'nun -1 mi +1 mi olduğunu anlamak için Berenblutt-Webb testi kullanılabilir.

Berenblutt-Webb sınaması:

$H_0 : \rho = +1$ hipotezini test etmek için Berenblutt ve Webb'in önerdiği *g* istatistiği

$$g = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t^2}$$

kullanılır. Burada, $\hat{\varepsilon}_t$ ve $\hat{u}_t$ aşağıda verilen modellerden elde edilir.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \quad \Rightarrow \hat{u}_t$$

$$\Delta Y_t = \beta_1 \Delta X_t + \varepsilon_t \quad \Rightarrow \hat{\varepsilon}_t$$

Berenblutt ve Webb'in *g* istatistiği Durbin-Watson tablosunda d_L ve d_U sınırlarına bakılarak karşılaştırılması yapılır. D-W *d* istatistiği $H_0 : \rho = 0$ hipotezini test etmesine karşın burada $H_0 : \rho = +1$ hipotezinin testi için D-W tablo değerleri kullanılır.

$H_0 : \rho = +1$ Hipotezi red edilemez	Kararsızlık	
d_L	d_U	

Örnek: Ücret-verimlilik örneğinde;

$H_0 : \rho = +1$

varsayımı altında $Y =$ ücret, $X =$ verimlilik; arasındaki regresyon modelinden $SSE = 204.6934$ ve ΔY ile ΔX arasındaki regresyon modelinden $SSE = 28.1938$ bulunur. Berenblutt-Webb *g* istatistiği

$$g = \frac{28.1938}{204.6934} = 0.1377$$

$n = 31$ gözlem ve $p = 1$ açıklayıcı değişken için

$\alpha = 0.05$ için $d_L = 1.363$, $d_U = 1.496$

$\alpha = 0.01$ için $d_L = 1.147$, $d_U = 1.273$

Her iki anlamlılık düzeyinde $g < d_L$ olduğundan $H_0 : \rho = +1$ hipotezi red edilemez.

Durbin-Watson *d* istatistiğine dayanan ρ

$d = 2(1-\hat{\rho})$ ya da $\hat{\rho} = 1 - \dfrac{d}{2}$

tahmin edilen *d* istatistiğinden ρ tahmin edilebilir. Eğer

$$d = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\rho} = 1$$
$$d = 2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\rho} = 0$$
$$d = 4 \quad \Rightarrow \quad \hat{\rho} = -1$$

dır. Görüleceği üzere D-W *d* istatistiği ρ'yu tahmin etme imkanı verir. Bu ilişkinin yaklaşık olduğu göz önüne alınacak olursa, bu yöntem büyük örneklemler için geçerlidir. Küçük örnekler için **Theil- Nagar uyarlanmış *d* istatistiği** kullanılır.

Theil-Nagar ρ sınaması:

Theil ile Nagar küçük örneklemlerde ρ'yu

$$\hat{\rho} = \frac{n^2(1-d/2)+k^2}{n^2-k^2}$$

istatistiği ile tahmin etmeyi önermişlerdir. Burada,

$n =$ gözlem sayısı
$d =$ Durbin-Watson *d* istatistiği
$k =$ parametre sayısı

ρ tahmininde yinemeli Cochrane-Orcutt süreci:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$
$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

modelleri alınarak ρ'yu tahmin etmek için Cochrane-Orcutt'un önerdiği adımlar:

1. $(Y_t;\ X_t)$ verisinin regresyon modelinden EKK yöntemiyle $\hat{u}_t$'lar bulunur.

2. Ardışık bağımlılık modelinden

$$\hat{u}_t = \hat{\rho}\hat{u}_{t-1} + v_t$$

kestirim denklemi bulunur. Bu AB (1) modelinin görgül karşılığıdır. Bu modelden

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2}$$

den bulunur.

3. Bulunan $\hat{\rho}$ kullanılarak

$$\underbrace{(Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1})}_{Y_t^*} = \underbrace{\beta_0(1-\hat{\rho})}_{\beta_0^*} + \beta_1 \underbrace{(X_t - \hat{\rho}X_{t-1})}_{X_t^*} + \underbrace{(u_t - \hat{\rho}u_{t-1})}_{\varepsilon_t^*}$$

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t^*$$

modelinin kestirim denklemi bulunur.

4. $\hat{\rho}$'nın ρ'nun en iyi tahmin edicisi olup olmadığı bilinemediğinden; β_0^* ve β_1'in EKK tahmin edicilerinden $\hat{\beta}_0^* = \hat{\beta}_0(1-\hat{\rho})$ ve $\hat{\beta}_1$ değerleri kestirim denkleminde yerine konularak

$$\hat{u}_t^{**} = Y_t - \hat{Y}_t^* = Y_t - \hat{\beta}_0^* - \hat{\beta}_1 X_t$$

hata terimleri bulunur.

5. Daha sonra

$$\hat{u}_t^{**} = \hat{\hat{\rho}}\hat{u}_{t-1}^{**} + w_t$$

regresyon denklemi elde edilir ve buradan

$$\hat{\hat{\rho}} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t^{**}\hat{u}_{t-1}^{**}}{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^{**2}}.$$

tahmin edicisi $\hat{\hat{\rho}}$, ρ'nun ikinci tur tahminidir.

Bu ikinci tur tahmininin ρ'nun en iyi tahmini olduğu bilinmediğinden aynı işlemler tekrarlanarak üçüncü tur tahmini elde edilir. Bu işlem ρ'nun ard arda tahminleri arasındaki farkın 0.01 ya da 0.005 gibi küçük bir değerden küçük oluncaya kadar devam eder. Aradaki fark küçük olduğunda bu işlem durdurulur ve son bulunan ρ için en iyi tahmin değeridir.

İki adımlı Cochrane-Orcutt süreci:

İlk adımda ρ regresyon modelinden tahmin edilen hatalardan elde edilir. İkinci adımda ρ'nun tahmin edicisi kullanılarak genelleştirilmiş fark denklemi bulunur. İki adımlı bu süreç yukarıda verilen ayrıntılı sürece oldukça yakın sonuçlar verir.

Ücret-verimlilik örneğinde $\hat{\rho} = 0.9404$ bulunmuş ve bu tahmin edici genelleştirilmiş fark denkleminden

$$\underbrace{(Y_t - 0.9404Y_{t-1})}_{Y_t^*} = \underbrace{\hat{\beta}_0(1-0.9404)}_{\hat{\beta}_0^*} + \hat{\beta}_1\underbrace{(X_t - 0.9404X_{t-1})}_{X_t^*} + \underbrace{(u_t - 0.9404u_{t-1})}_{\varepsilon_t^*}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{Y}_t^* = 1.7152 + 0.7152X_t^*$$

$$S_{\hat{\beta}}: \; 1.1069 \quad 0.1569$$

$$R^2 = 0.4174, \quad d = 2(1-0.9404) = 1.5886$$

$$\hat{\beta}_0^* = 1.7152 = \hat{\beta}_0(1-0.9404) \quad \Rightarrow \hat{\beta}_0 = 28.7785 \text{ bulunur.}$$

ρ tahmininde iki aşamalı Durbin yöntemi:

Genelleştirilmiş fark denklemi

$$(Y_t - \rho Y_{t-1}) = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow Y_t = \beta_0(1-\rho) + \beta_1 X_t - \rho\beta_1 X_{t-1} + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Durbin ρ'yu tahmin etmek için:

i) Yukarıdaki Y_t'nin modelini çoklu regresyon modeliymiş gibi ele alıp, Y_t'nin X_t, X_{t-1}, Y_{t-1} üzerine regresyon modeli bulunarak Y_{t-1} regresyon katsayısını $\hat{\rho}$ yani ρ'nun tahmin edicisi olarak ele alınır. $\hat{\rho}$ sapmalı olmasına karşın ρ'nun tutarlı bir tahmin edicisidir.

ii) $\hat{\rho}$'yı bulduktan sonra $Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}$ ve $X_t^* = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$ değerleri bulunur. Daha sonra $\left(Y_t^*, X_t^*\right)$ arasındaki EKK regresyonunun kestirim denklemi bulunur.

$$Y_t^* = \beta_0 + \beta_1 X_t^* + \varepsilon_t$$

Ücret-Verimlilik örneğinde;

$$\hat{Y}_t = 3.4879 + 0.7335 X_t - 0.7122 X_{t-1} + 0.9422 Y_{t-1}$$

$$S_{\hat{\beta}} : \ 2.0889 \quad 0.1578 \qquad 0.1681 \qquad 0.0699$$

$$R^2 = 0.9922, \quad d = 2\left(1-\hat{\rho}\right) = 2\left(1-0.9422\right) = 1.7664$$

Görüleceği üzere iki adımlı Cochrane- Orcutt süreciyle bulunan $\hat{\rho}$'dan çokta farklı bir sonuç elde edilmemiştir.

Yöntemlerin Karşılaştırılması:

Eğer örneklem büyükse, yani 60-70'in üzerindeyse hangi yöntemin seçildiği o kadar önemli değildir. Çünkü hepsi aşağı yukarı benzer sonuçları verir. Ama örneklem sonlu ya da küçük ise sonuçlar seçilen yönteme göre değişir. Öyleyse küçük örneklemlerden hangi yöntem seçilmelidir? Ne yazık ki kesin bir yanıtı yoktur. Monte Carlo simülasyon çalışmalarında herhangi bir yöntem tutarlı olarak seçilmemiştir. Uygulamada en çok Cochrane-Orcutt yöntemi kullanılmaktadır.

Ardışık bağlanımlı koşullu değişen varyans:

Ardışık bağımlılık sorunu zaman serisi verilenin bir özelliği iken, değişen varyans kesit verilerinin bir özelliğidir. Tahmin hatalarının davranışı regresyondaki hata terimlerinin davranışına bağlı olduğuna göre u_t'nin varyansında bir ardışık bağımlılık söz konusu olabilir. Bu ilişkiyi yakalamak için Engle "*ardaşık bağlanımlı koşullu değişen varyans* (ABKDV)" modelini geliştirmiştir. k değişkenli çoklu regresyon modeli

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + u_t$$

ve hata teriminin *t-1* dönemindeki bilgiye koşullu olarak dağıldığını varsayalım. Yani

$$u_t \sim N\left(0, \underbrace{\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2}_{\sigma_{u_t}^2}\right)$$

$\sigma_{u_t}^2$'nin $\left(t-1\right)$ dönemindeki hata teriminin karesine bağlı olması ardışık bağımlılığı getirmektedir. Eğer

$$Var(u_t) = \sigma_{u_t}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p u_{t-p}^2$$

ise buna ABKDV (*p*) süreci , $p = 1 \Rightarrow$ ABKDV(1) süreci denilmektedir. Hata varyansında ardışık bağımlılık olup olmamasına ilişkin hipotez

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$$

olup, bu hipotezin red edilmesi $Var(u_t) = \sigma_{u_t}^2 = \alpha_0$, yani hata varyansının sabit olduğunu göstermektedir. Ho hipotezinin testi için önce

$$\hat{u}_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \hat{\alpha}_2 \hat{u}_{t-2}^2 + \cdots + \hat{\alpha}_p \hat{u}_{t-p}^2$$

regresyon modelinde $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_p$ tahmin edicileri bulunur ve R^2 değeri elde edilir. Buradaki hata terimleri yukarıda verilen çoklu regresyon modelinden tahmin edilebilir. Daha sonra $nR^2 \sim \chi_p^2$ olduğundan dolayı H_0 hipotezi test edilir.

Örnek: Ücret-verimlilik örneğinden ABKDV(1), ABKDV(2), ABKDV(3), ABKDV(4) ve ABKDV(5) modelleri tahmin edilmiş, yalnız ABKDV(1) modeli anlamlı bulunmuştur. Yani

$$\hat{u}_t^2 = 2.0746 + 0.6946 \hat{u}_{t-1}^2$$

$$t: \quad 1.0583 \quad 5.0364$$

$$R^2 = 0.4665 \quad d = 1.67$$

$H_0 : \alpha_1 = 0$ hipotezi için test istatistiği $nR^2 = (31)(0.4665) = 14.46$ ve $p - \text{değeri} = 0.000143$ bulunur. H_0 hipotezi red edilir ve hata varyansının ardışık bağımlı olduğu sonucu ortaya çıkar.