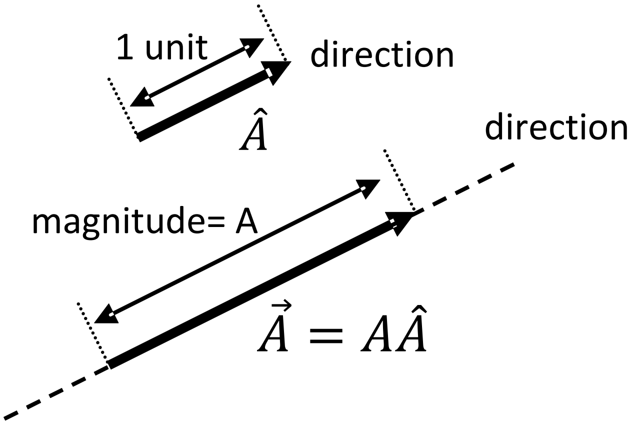
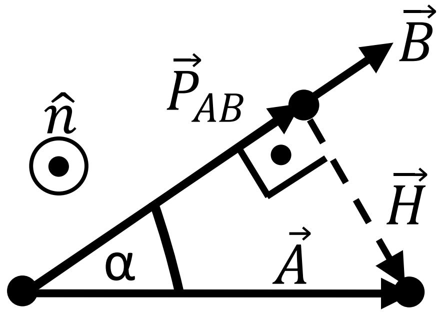
Scalar and Vector Fields

A vector ($\vec{A}$), is defined by its magnitude (A) and the direction that is indicated by a unit vector ($\hat{A}$). A unit vector is a vector with magnitude 1. The vector is represented in the following form: $\vec{A}= A\hat{A}$.





$\vec{A}= A\hat{A}$ ve $\vec{B}= B\hat{B}$ vektörlerinin aralarındaki açı α ve sayfa düzlemine dik birim vektör $\hat{n}$ olsun.

Kartezyen koordinat sisteminde $\vec{\mathbf{A}}=\mathbf{A_x\hat{x}+ A_y\hat{y}+ A_z\hat{z}}$ ve $\vec{\mathbf{B}}=\mathbf{B_x\hat{x}+ B_y\hat{y}+ B_z\hat{z}}$ olmak üzere,

Vektörlerde toplama ve çıkarma:

Vektörlerde toplama işlemine göre değişme özelliği vardır.

Toplama: $\vec{A}+\vec{B}= \vec{B}+\vec{A} = (A_x\hat{x}+ A_y\hat{y}+ A_z\hat{z}) + (B_x\hat{x}+ B_y\hat{y}+ B_z\hat{z}) = (A_x+B_x)\hat{x}+(A_y+B_y)\hat{y}+(A_z+B_z)\hat{z}$

Vektörlerde çıkarma işlemine göre değişme özelliği yoktur.

Çıkarma: $\vec{A}-\vec{B} = -(\vec{B}-\vec{A}) = (A_x\hat{x}+ A_y\hat{y}+ A_z\hat{z}) - (B_x\hat{x}+ B_y\hat{y}+ B_z\hat{z}) = (A_x-B_x)\hat{x}+(A_y-B_y)\hat{y}+(A_z-B_z)\hat{z}$

Vektörlerin çarpımı:

a) Nokta Çarpım:

(Skaler ya da Nokta Çarpım): Sonuç skalerdir ve vektörlerde çarpmanın toplama üzerinde değişme özelliği kullanılarak hesaplanır:

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{ABcos(\alpha)} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) \cdot (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z})$$

$$\begin{aligned} &= \left(A_x\hat{x} \cdot B_x\hat{x} + A_x\hat{x} \cdot B_y\hat{y} + A_x\hat{x} \cdot B_z\hat{z}\right) \\ &\quad + (A_y\hat{y} \cdot B_x\hat{x} + A_y\hat{y} \cdot B_y\hat{y} + A_y\hat{y} \cdot B_z\hat{z}) \\ &\quad + (A_z\hat{z} \cdot B_x\hat{x} + A_z\hat{z} \cdot B_y\hat{y} + A_z\hat{z} \cdot B_z\hat{z}) \end{aligned}$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \Rightarrow$$

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z} = \mathbf{ABcos(\alpha)}$$

Buradan; $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri başlangıç noktaları bir olacak şekilde çizildiğinde $\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ vektörü üzerine projeksiyon vektörü, $\vec{P}_{AB} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{B}\vec{B}$ şeklinde ve, $\vec{A}$ vektörünün bitişi noktasının $\vec{B}$ vektörüne olan dik uzaklığı, $\vec{H} = \vec{A} - \vec{P}_{AB}$ olarak bulunur.

b) Çapraz çarpım:

Sonuç vektöreldir ve sağ el kuralına göre hesaplanan yönde **(**$\hat{n}$ yönünde**) ve** ABsin(α) büyüklüğünde bir vektördür. Sağ el kuralına göre, sağ elin serçe parmağı, parmağın ucu vektör yönünde iken $\vec{A}$ vektörü üzerine oturacak şekilde yerleştirilir ve baş parmak bitişik durumdaki diğer 4 parmağa dik olarak tutulur; baş parmak dışındaki 4 parmak, $\vec{B}$ vektörü yönünde hareket ettiğinde baş parmağın gösterdiği yön, $\hat{n}$ yönüdür. Bu örnekte, $\hat{n}$ yönü sayfa düzleminden dışarı doğru olmaktadır.

$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{n}$ ABsin(α) şeklinde hesaplanabileceği gibi,

$\vec{A}$ x $\vec{B}$ = $\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$ = $\hat{x}(A_yB_z\text{-}A_zB_y)+\hat{y}(A_zB_x\text{-}A_xB_z)+\hat{z}(A_xB_y\text{-}A_yB_x)$ determinantının

hesaplanması ile de bulunabilir.

Dik koordinat sistemleri:

Bunlardan bazıları, kartezyen koordinat sistemi, silindirik koordinat sistemi ve küresel koordinat sistemidir. Bu koordinat sistemlerinde, 3 boyutlu uzayı geren 3 adet birim vektör aynı koordinat sistemindeki diğer iki vektöre diktir. Yani, $\hat{x} \perp \hat{y}$, $\hat{x} \perp \hat{z}$, $\hat{y} \perp \hat{z}$ ve diklikten dolayı aynı koordinat sistemindeki farklı iki birim vektörün nokta çarpımı 0'a eşittir: Örneğin, $\hat{x} \cdot \hat{z} = |\hat{x}||\hat{z}| \cos(90) = 0$. Diğer koordinat sistemleri için de benzer ilişkiler alttaki tabloda özetlenmiştir. Bir vektörün büyüklüğü nokta çarpım ile bulunabilir:

$$\vec{A} = A\hat{A} \Rightarrow |\vec{A}| = |A\hat{A}| = |A||\hat{A}| = A|\hat{A}| = A.1 = A$$

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) \cdot (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})}$$

$$A = \sqrt{\begin{matrix} (A_x\hat{x} \cdot A_x\hat{x} + A_x\hat{x} \cdot A_y\hat{y} + A_x\hat{x} \cdot A_z\hat{z}) \\ +(A_y\hat{y} \cdot A_x\hat{x} + A_y\hat{y} \cdot A_y\hat{y} + A_y\hat{y} \cdot A_z\hat{z}) \\ +(A_z\hat{z} \cdot A_x\hat{x} + A_z\hat{z} \cdot A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \cdot A_z\hat{z}) \end{matrix}}$$

$$A = \sqrt{A_x\hat{x} \cdot A_x\hat{x} + A_y\hat{y} \cdot A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \cdot A_z\hat{z}} = \sqrt{A_xA_x + A_yA_y + A_zA_z}$$

$$= \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$$

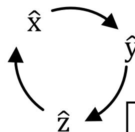
Dairesel döngüye göre, $\hat{x}$ x $\hat{y} = \hat{z}$

Dairesel döngüye ters yönde çapraz çarpım yapıldığında (ya da vektörlerin sırası değiştirildiğinde) ise sonuç – işaretlidir:

$$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$$

Birim vektörlerin çapraz çarpım sonucu olan vektörler ve işaretleri sağ el kuralına göre bulunabilir.

Kartezyen Koordinat Sistemi



Şekil 3

$\hat{x} \perp \hat{y}$, $\hat{x} \perp \hat{z}$, $\hat{y} \perp \hat{z}$

$\hat{x} \cdot \hat{x}=1.1.\cos(0)=1,$

$\hat{y} \cdot \hat{y}=1.1.\cos(0)=1,$

$\hat{z} \cdot \hat{z}=1.1.\cos(0)=1,$

$\hat{x} \cdot \hat{y}=\hat{y} \cdot \hat{x}=1.1.\cos(90)=0,$

$\hat{x} \cdot \hat{z}=\hat{z} \cdot \hat{x}=1.1.\cos(90)=0,$

$\hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{y}=1.1.\cos(90)=0$

$\hat{x} \times \hat{y} = 1.1.\sin(90)\ \hat{z} = \hat{z}$

$\hat{y} \times \hat{z} = 1.1.\sin(90)\ \hat{x} = \hat{x}$

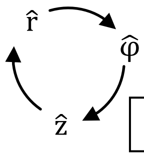
$\hat{z} \times \hat{x} =1.1.\sin(90)\ \hat{y} = \hat{y}$

$\hat{y} \times \hat{x} = 1.1.\sin(90)(-\hat{z}) = -\hat{z}$

$\hat{z} \times \hat{y} = 1.1.\sin(90)(-\hat{x}) = -\hat{x}$

$\hat{x} \times \hat{z} = 1.1.\sin(90)(\ -\hat{y}) = -\hat{y}$

Silindirik Koordinat Sistemi



Şekil 4

$\hat{r} \perp \hat{\varphi}$, $\hat{r} \perp \hat{z}$, $\hat{\varphi} \perp \hat{z}$

$\hat{r} \cdot \hat{r}=1.1.\cos(0)=1,$

$\hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} =1.1.\cos(0)=1,$

$\hat{z} \cdot \hat{z}=1.1.\cos(0)=1,$

$\hat{r} \cdot \hat{\varphi}=\hat{\varphi} \cdot \hat{r}=1.1.\cos(90)=0,$

$\hat{r} \cdot \hat{z}=\hat{z} \cdot \hat{r}=1.1.\cos(90)=0,$

$\hat{\varphi} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{\varphi}=1.1.\cos(90)=0$

$\hat{r} \times \hat{\varphi} = 1.1.\sin(90)\ \hat{z} = \hat{z}$

$\hat{\varphi} \times \hat{z} = 1.1.\sin(90)\ \hat{r} = \hat{r}$

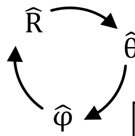
$\hat{z} \times \hat{r} =1.1.\sin(90)\ \hat{\varphi} = \hat{\varphi}$

$\hat{\varphi} \times \hat{r} = 1.1.\sin(90)(-\hat{z}) = -\hat{z}$

$\hat{z} \times \hat{\varphi} = 1.1.\sin(90)(-\hat{r}) = -\hat{r}$

$\hat{r} \times \hat{z} = 1.1.\sin(90)(\ -\hat{\varphi}) = -\hat{\varphi}$

Küresel Koordinat Sistemi



Şekil 5

$\hat{R} \perp \hat{\theta}$, $\hat{R} \perp \hat{\varphi}$, $\hat{\theta} \perp \hat{\varphi}$

$\hat{R} \cdot \hat{R}=1.1.\cos(0)=1,$

$\hat{\theta} \cdot \hat{\theta}=1.1.\cos(0)=1,$

$\hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi}=1.1.\cos(0)=1,$

$\hat{R} \cdot \hat{\theta}=\hat{\theta} \cdot \hat{R}=1.1.\cos(90)=0,$

$\hat{R} \cdot \hat{\varphi}=\hat{\varphi} \cdot \hat{R}=1.1.\cos(90)=0,$

$\hat{\theta} \cdot \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \cdot \hat{\theta}==1.1.\cos(90)=0$

$\hat{R} \times \hat{\varphi} = 1.1.\sin(90)\ \hat{z} = \hat{z}$

$\hat{\varphi} \times \hat{z} = 1.1.\sin(90)\ \hat{R} = \hat{R}$

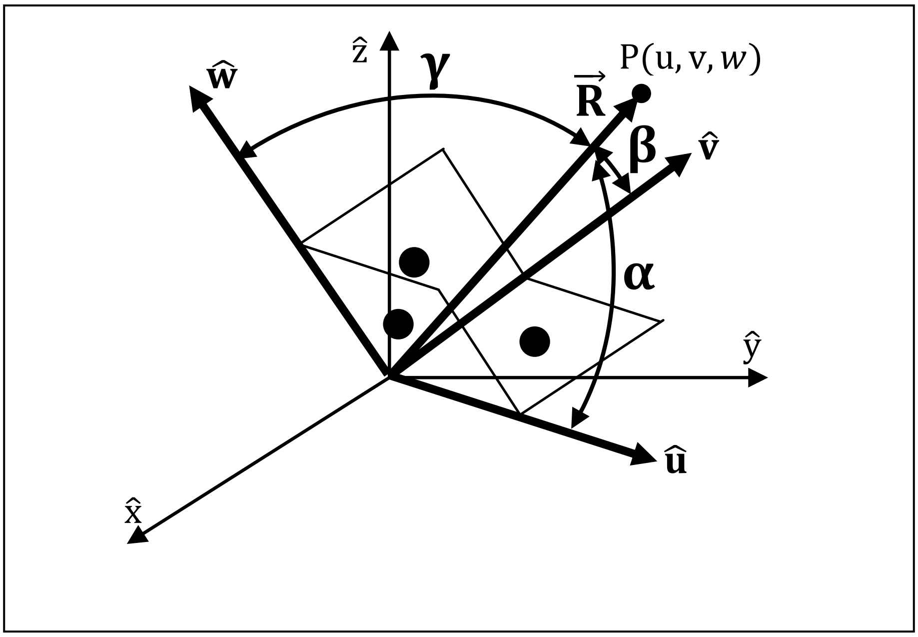
$\hat{z} \times \hat{R} =1.1.\sin(90)\ \hat{\varphi} = \hat{\varphi}$

$\hat{\varphi} \times \hat{R} = 1.1.\sin(90)(-\hat{z}) = -\hat{z}$

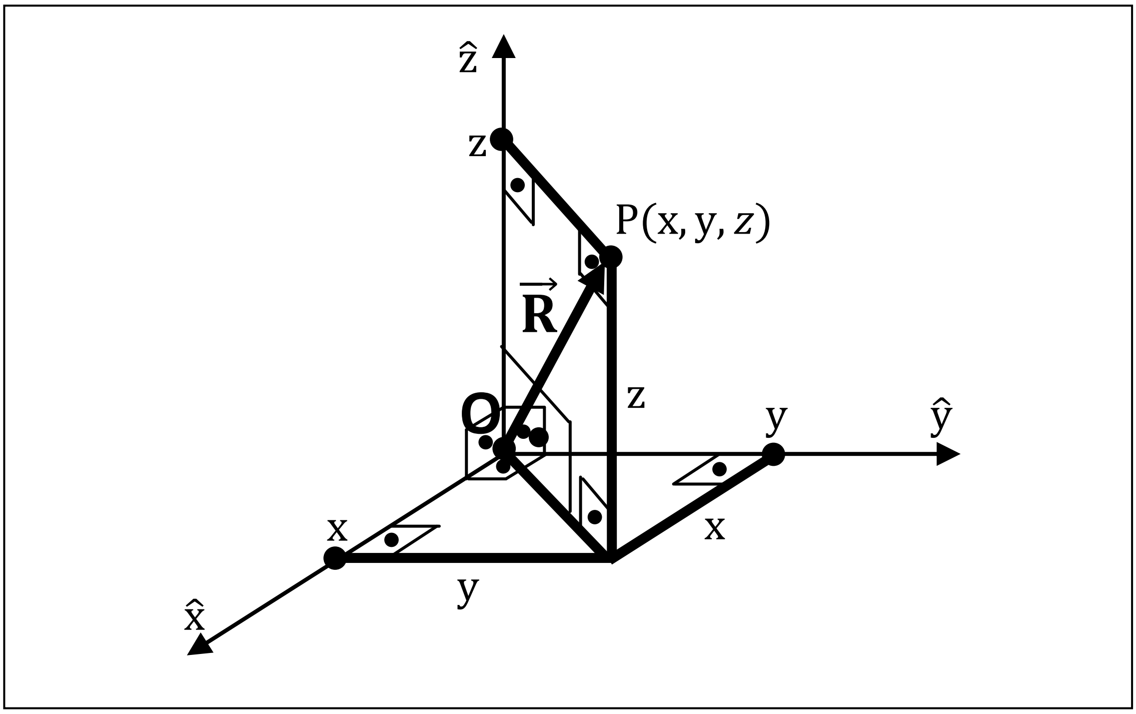
$\hat{z} \times \hat{\varphi} = 1.1.\sin(90)(-\hat{R}) = -\hat{R}$

$\hat{R} \times \hat{z} = 1.1.\sin(90)(\ -\hat{\varphi}) = -\hat{\varphi}$

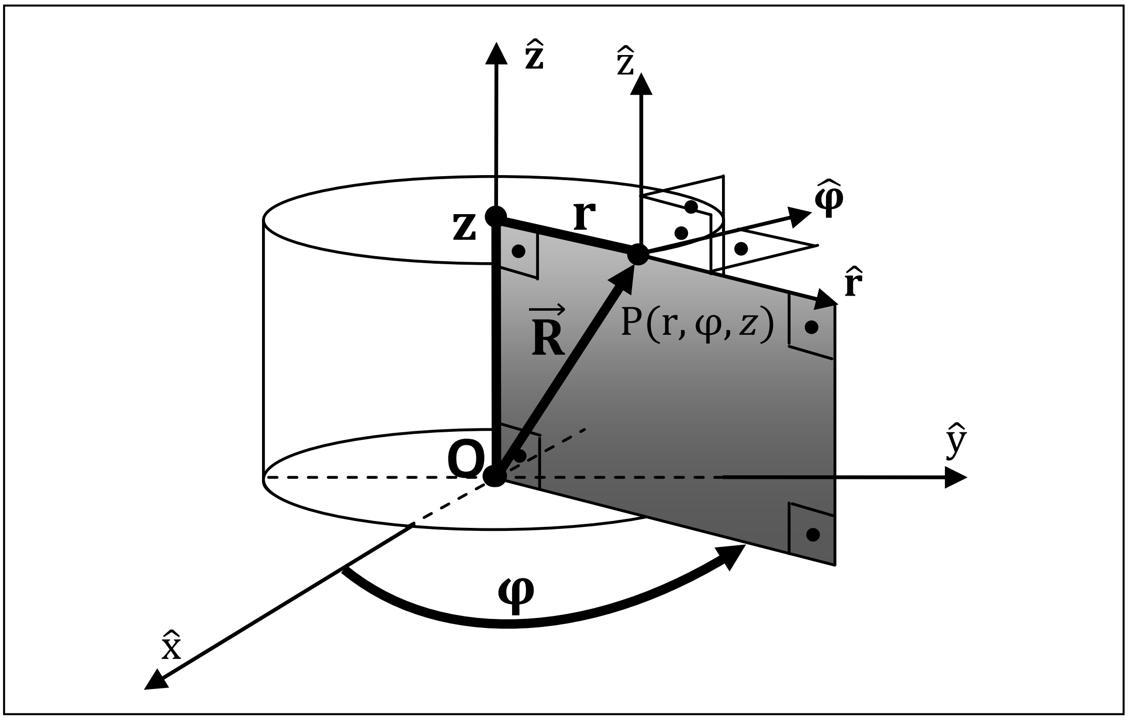
Genel Dik Koordinat Sistemi:

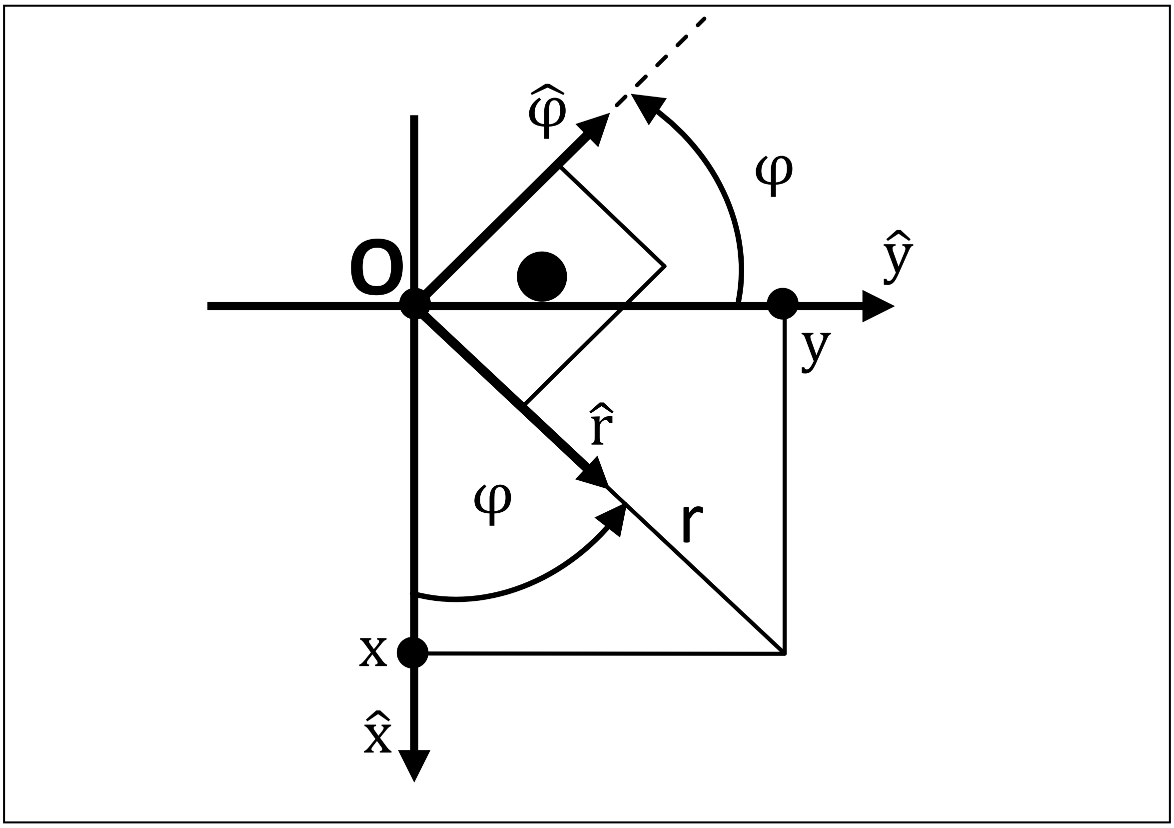


Kartezyen Koordinat Sistemi:



Silindirik Koordinat Sistemi:





Silindirik koordinat düzleminde, $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{x}$, $\hat{y}$ aynı düzlemdedir.

$\hat{z}$ vektörü $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{x}$, $\hat{y}$ vektörlerinin bulunduğu düzleme diktir.

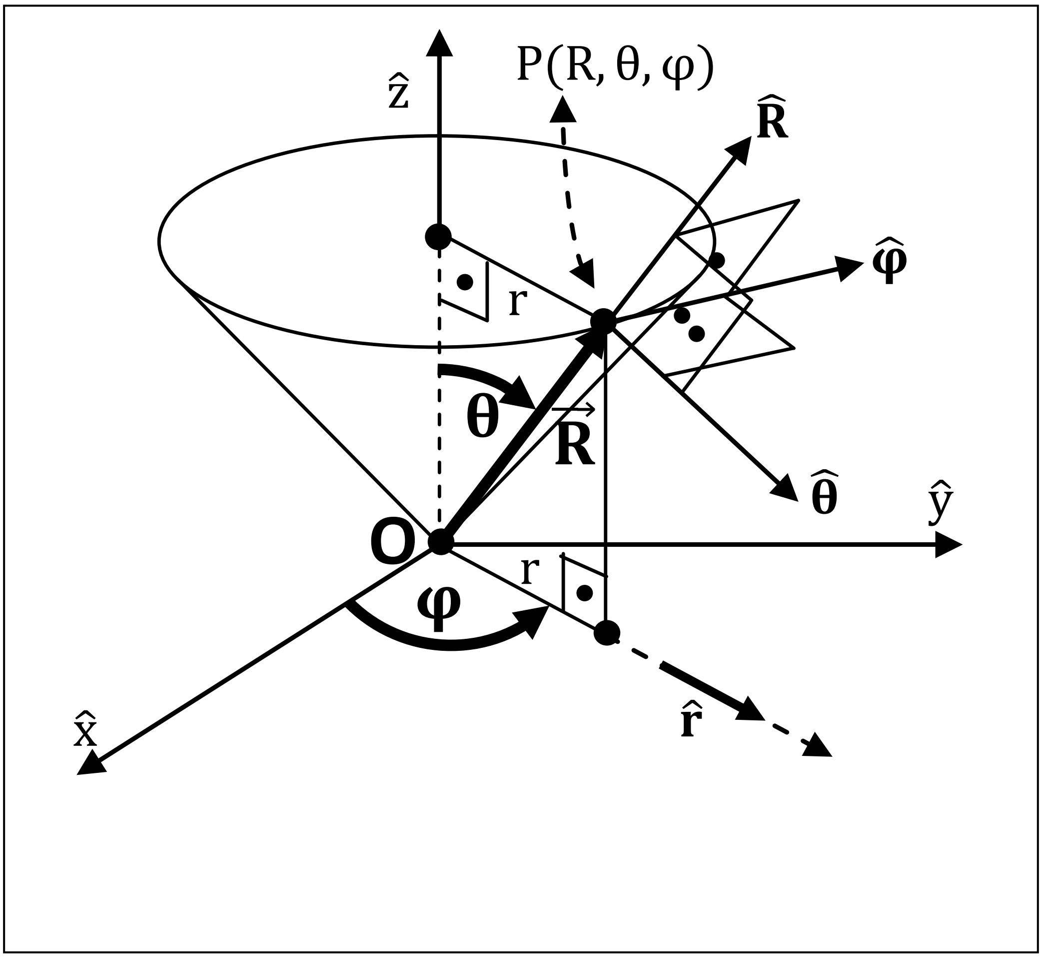
$\hat{x}$ ile $\hat{r}$ arasındaki açı φ'dır,

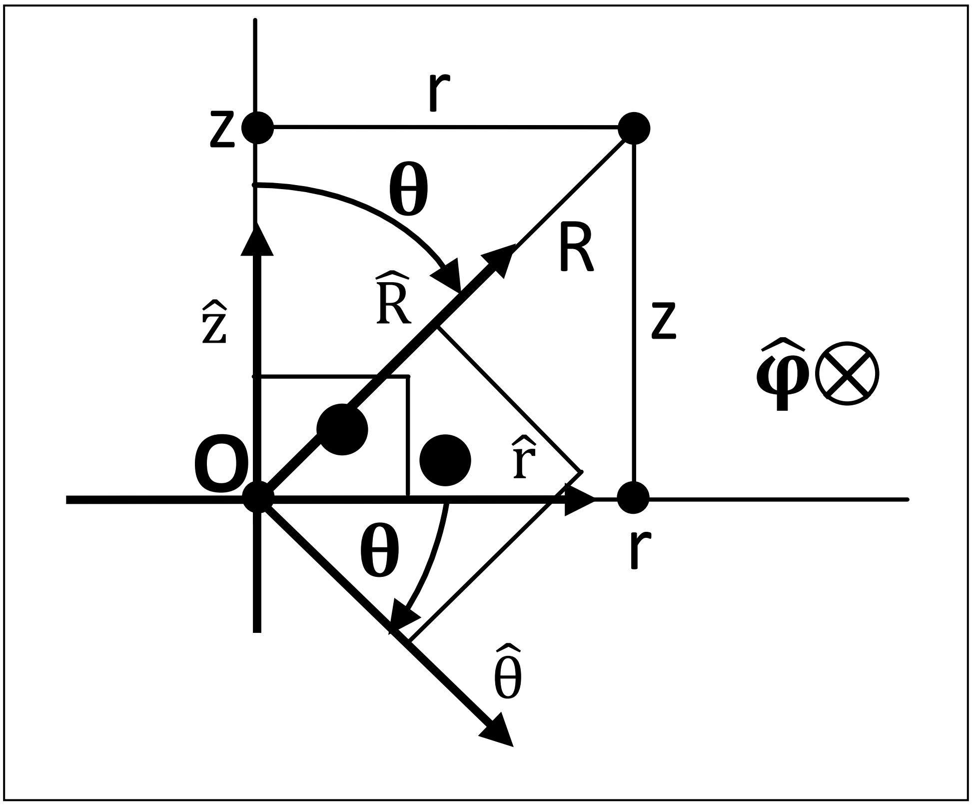
$\hat{y}$ ile $\hat{r}$ arasındaki açı 90-φ'dır,

$\hat{x}$ ile $\hat{\varphi}$ arasındaki açı $90 + \varphi$'dır,

$\hat{y}$ ile $\hat{\varphi}$ arasındaki açı ise φ'dır.

Küresel Koordinat Sistemi:





$\hat{z}$, $\hat{R}$, $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ aynı düzlemdedir

$\hat{\varphi}$ vektörü, ($\hat{z}$, $\hat{R}$, $\hat{r}$, $\hat{\theta}$)'nin ait olduğu düzleme dik yöndedir.

Yani, $\hat{\varphi}$ şu dört vektöre de diktir: $\hat{z}$, $\hat{R}$, $\hat{r}$, $\hat{\theta}$.

Yukarıdaki şekilde, $\hat{\varphi}$ sayfa düzlemine diktir ve sayfadan içeri doğrudur.

Farklı koordinat sistemlerine ait birim vektörlerin nokta çarpımları:

Silindirik-Kartezyen

$$\hat{r} \cdot \hat{x}=\hat{x} \cdot \hat{r}=\cos(\phi)$$

$$\hat{\varphi} \cdot \hat{x}=\hat{x} \cdot \hat{\varphi} =\cos(90+\phi)=-\sin(\phi)$$

$$\hat{z} \cdot \hat{x}=\hat{x} \cdot \hat{z} =\cos(90)=0$$

$$\hat{r} \cdot \hat{y}=\hat{y} \cdot \hat{r}\sin(\phi)$$

$$\hat{\varphi} \cdot \hat{y}=\hat{y} \cdot \hat{\varphi} =\cos(\phi)$$

$$\hat{z} \cdot \hat{y}=\hat{y} \cdot \hat{z} =\cos(90)=0$$

$$\hat{r} \cdot \hat{z}=\hat{z} \cdot \hat{r}=\cos(90)=0$$

$$\hat{\varphi} \cdot \hat{z}=\hat{z} \cdot \hat{\varphi} =\cos(90)=0$$

$$\hat{z} \cdot \hat{z}=\cos(0)=1$$

Küresel-Kartezyen

$$\hat{R} \cdot \hat{x}=\hat{x} \cdot \hat{R}=\sin(\theta)\cos(\phi)$$

$$\hat{\theta} \cdot \hat{x}=\hat{x} \cdot \hat{\theta} =\cos(\theta)\cos(\phi)$$

$$\hat{\varphi} \cdot \hat{x}=\hat{x} \cdot \hat{\varphi} =\cos(90+\phi)=-\sin(\phi)$$

$$\hat{R} \cdot \hat{y}=\hat{y} \cdot \hat{R}=\sin(\theta)\sin(\phi)$$

$$\hat{\theta} \cdot \hat{y}=\hat{y} \cdot \hat{\theta} =\cos(\theta)\sin(\phi)$$

$$\hat{\varphi} \cdot \hat{y}=\hat{y} \cdot \hat{\varphi} =\cos(\phi)$$

$$\hat{R} \cdot \hat{z}=\hat{z} \cdot \hat{R}=\cos(\theta)$$