geçerli olmakla birlikte, ilave olarak iki varsayım daha mevcuttur. Buna göre, çoklu doğrusal regresyonun varsayımları aşağıdaki gibi verilmiştir:

a) Normallik varsayımı: $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2), i=1,2,...,n$ için. Hata terimleri normal dağılım özelliği gösterir.

b) Sıfır ortalama: $E(\varepsilon_i)=0$, i=1,2,…,n. Hata terimlerinin beklenen değeri sıfırdır.

c) Sabit varyans: $V(\varepsilon_i)=\sigma_1^2=\sigma_2^2=...=\sigma_n^2=\sigma^2$'dir. Regresyon hata terimlerinin varyansı sabittir. Eğer veriler bu varsayımı sağlamıyorsa ortaya değişen varyanslılık sorunu çıkar.

d) Otokorelasyon olmaması: $Cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=E\left[(\varepsilon_i-E(\varepsilon_i)\right]\left[(\varepsilon_j-E(\varepsilon_j)\right]=0, \quad i\neq j$. Hata terimleri arasında ilişki olması durumu otokorelasyon (ardışık bağımlılık, özilişki) adını alır. Ancak bu varsayıma göre, bir hata terimi kendinden önce ya da sonra yer alan hata terimlerini etkilememelidir. ε_i'lerin kestirimi olan e_i'lerin birbirleri ile ilişkili olmamaları istenir.

e) Bağımsız değişkenin tesadüfî değişken olmaması: $E(x_i\varepsilon_i)=0, \; i=1,2,.....,n$. X'ler raslantı değişkeni olduğunda X ve ε değişkenlerinin bağımsız olmaları gereklidir.

f) Çoklu bağlantı olmaması: Bir bağımsız değişken diğer değişkenler tarafından açıklanabiliyor ise, bu değişkenler arasında doğrusal bağımlılık mevcuttur. Bağımsız değişkenlerin ikişer ikişer aralarında yüksek derecede ilişki bulunması halidir. Bu durumda X matrisinin rankı k+1'den küçük olacak, dolayısıyla $(X'X)^{-1}$ matrisinin tersi alınamayacaktır. Uygulamalarda bağımsız değişkenler arasında az ilişki bulunabilmekte ancak yüksek derecede ilişki olması durumunda ise çoklu bağlantı ya da çoklu doğrusal bağlılık ortaya çıkmaktadır (Güriş ve Çağlayan, 2010) (Dikmen, 2012).

6.4. Parametrelerin Tahmini

Basit doğrusal regresyon modelinde olduğu gibi, çoklu doğrusal regresyon modelinin parametreleri de aynı yöntemle tahmin edilebilmektedir. Ancak, çoklu doğrusal regresyon modelinde k sayıda bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin tahmin edilmesi söz konusu olduğunda işlemler biraz daha karmaşık hale gelebilmektedir (Dikmen, 2012).

6.4.1. Çoklu Regresyonda En Küçük Kareler Kestirimi

Basit doğrusal regresyon denklemini oluşturan iki değişkenin varlığı söz konusu olduğunda bir doğru oluşmaktadır. Ancak, k sayıda bağımsız değişkenin oluşturduğu çoklu doğrusal regresyon denklemi bu değişkenlerin oluşturduğu k boyutlu uzayda bir düzlem oluşmaktadır.

Anakütle çoklu doğrusal regresyon modeli,

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$ şeklinde daha önce tanımlanmıştı. Burada, En küçük kareler (EKK) ile amacımız daha önce olduğu gibi yine aynı şekilde,

$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$ terimini en küçükleyen ya da minimize eden regresyon katsayılarının kestirimlerini elde etmektir.

Normal denklemler ile tahmin şu şekilde yapılmaktadır:

Biri bağımlı diğer ikisi bağımsız değişken olmak üzere üç değişkenli bir örnek çoklu regresyon modelini,

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u_i$ şeklinde ifade etmek mümkündür.

AKT $= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_1 - \hat{\beta}_2 x_2)^2 = 0$ şeklinde yazılır. Bu terimin, $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$'e göre türevleri alındıktan sonra kısmi türevler sıfıra eşitlenir ve işlemlere aşağıdaki gibi devam edilir:

$$\frac{\partial AKT}{\partial \hat{\beta}_0} = -2\sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i - \hat{\beta}_2 x_2) = 0$$

$$\frac{\partial AKT}{\partial \hat{\beta}_1} = -2\sum x_1 (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_1 - \hat{\beta}_2 x_2) = 0$$

$$\frac{\partial AKT}{\partial \hat{\beta}_2} = -2\sum x_2 (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_1 - \hat{\beta}_2 x_2) = 0$$

Bu üç eşitlik düzenlenirse, aşağıdaki normal denklemler elde edilir.

$$\sum y_i = \hat{\beta}_0 n + \hat{\beta}_1 \sum x_1 + \hat{\beta}_2 \sum x_2$$

$$\sum y_i x_1 = \hat{\beta}_0 \sum x_1 + \hat{\beta}_1 \sum x_1^2 + \hat{\beta}_2 \sum x_1 x_2$$

$\sum y_i x_2 = \hat{\beta}_0 \sum x_2 + \hat{\beta}_1 \sum x_1 x_2 + \hat{\beta}_2 \sum x_2^2$ (Dikmen, 2012).

Bu denklemlere normal denklemler adı verilmektedir. Normal denklemlerin ortak çözümü sayesinde $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ tahmin edilmektedir.

Örnek 6.1. 2001-2013 yılları arasındaki Şekerpancarı verimine etki eden Eigs ve kullanılan gübre miktarları verilmiştir. Verimin, Eigs ve gübrenin bir fonksiyonu olduğu varsayımı ile oluşturulan çoklu doğrusal denkleminin $\hat{Y}_i = \beta_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2$ parametrelerini En Küçük Kareler (EKK) yöntemiyle tahmin ediniz.

Çizelge 8. Türkiye'de Şekerpancarı Verimi, Gübre Kullanım Miktarları ve Erkek İşgücü Değerleri

Yıl	**Verim (10 Kg/da)**	**Gübre (10 Kg/da)**	**Erkek İşgücü (Saat/da)**
2001	354	1,0	14,22
2002	444	1,1	13,21
2003	401	1,2	13,29
2004	429	1,0	13,40
2005	452	1,3	13,41
2006	446	1,4	13,59
2007	415	1,1	13,75
2008	482	1,2	13,54
2009	533	1,3	13,70
2010	545	1,2	15,20
2011	548	1,5	14,08
2012	532	1,4	14,20
2013	566	1,5	14,10

Y: Verim (10 Kg/da)
X_1: Gübre (10 Kg/da)
X_2: Eigs/da
Kaynak: Türkiye İstatistik Kurumu, 2014.

$$\sum y_i = \hat{\beta}_0 n + \hat{\beta}_1 \sum x_1 + \hat{\beta}_2 \sum x_2$$
$$\sum y_i x_1 = \hat{\beta}_0 \sum x_1 + \hat{\beta}_1 \sum x_1^2 + \hat{\beta}_2 \sum x_1 x_2$$
$$\sum y_i x_2 = \hat{\beta}_0 \sum x_2 + \hat{\beta}_1 \sum x_1 x_2 + \hat{\beta}_2 \sum x_2^2$$

Çizelge 9. Türkiye'de Şekerpancarı Verimi, Gübre Kullanım Miktarları ve Erkek İşgücü Değerlerine İlişkin Hesaplamalar

YIL	Y	X1	X2	Y*X1	Y*X2	X1²	X2²	X1*X2
2001	354	1,00	14,22	354,00	5033,88	1,00	202,21	14,22
2002	444	1,10	13,21	488,40	5865,24	1,21	174,50	14,53
2003	401	1,20	13,29	481,20	5329,29	1,44	176,62	15,95
2004	429	1,00	13,40	429,00	5748,60	1,00	179,56	13,40
2005	452	1,30	13,41	587,60	6061,32	1,69	179,83	17,43
2006	446	1,40	13,59	624,40	6061,14	1,96	184,69	19,03
2007	415	1,10	13,75	456,50	5706,25	1,21	189,06	15,13
2008	482	1,20	13,54	578,40	6526,28	1,44	183,33	16,25
2009	533	1,30	13,70	692,90	7302,10	1,69	187,69	17,81
2010	545	1,20	15,20	654,00	8284,00	1,44	231,04	18,24
2011	548	1,50	14,08	822,00	7715,84	2,25	198,25	21,12
2012	532	1,40	14,20	744,80	7554,40	1,96	201,64	19,88
2013	566	1,50	14,10	849,00	7980,60	2,25	198,81	21,15
TOPLAM	6147	16,20	179,69	7762,20	85168,94	20,54	2487,23	224,13

Hesaplamalardan sonra normal denklemler,

$$6147 = 13\hat{\beta}_0 + 16.20\hat{\beta}_1 + 179,69\hat{\beta}_2$$

$$7762,20 = 16,20\hat{\beta}_0 + 20,54\hat{\beta}_1 + 224,13\hat{\beta}_2$$

$$85168,94 = 179,69\hat{\beta}_0 + 224,13\hat{\beta}_1 + 2487,23\hat{\beta}_2$$ şeklinde yazılır.

Bu üç bilinmeyenli denklemin çözümünden regresyon modelinin parametrelerini aşağıdaki şekilde elde etmek mümkün olacaktır.

$$\hat{\beta}_0 = -439,95$$

$$\hat{\beta}_1 = 264,69$$

$$\hat{\beta}_2 = 42,18$$

Modelimiz,

$$Y_i = -439,95 + 264,69X_1 + 42,18X_2$$ şeklinde yazılır.

Sabit terim modelde $\hat{\beta}_0$ olarak bilinir ve tahmin edilen modeldeki değeri -439,95'dir. Gübre ve Eigs sıfır olduğunda verim -439,95'dir. Buna göre Eigs'i sabit tuttuğumuzda kullanılan gübre bir birim arttığında ortalama verim 264,69 (10 kg/da) birim artacaktır. Gübre sabit tutulduğunda Eigs bir birim arttığında ortalama verim 42,18 (10 kg/da) birim artacaktır.

6.4.2. Çoklu Regresyonda Parametrelerin Matrisler ile Tahmini

Basit doğrusal regresyonda biri bağımlı diğeri bağımsız değişken olmak üzere iki değişken mevcut idi. Bunun için parametrelerin tahmini daha kolay olmuştur. Ancak, bağımsız değişken sayısı k tane ve bir bağımlı değişken olmak üzere, k bilinmeyenli k sayıda denklemin ortak çözümü neticesinde parametreleri tahmin etmek mümkün olacaktır. Bu nedenle, değişken sayısı arttıkça bir değişkenin çekilmesi diğerinde yerine konması formüllerde karışıklığa sebep olabilecektir. Matris yöntemi ile parametrelerin tahmini bu açıdan bir kolaylık sağlamaktadır. (Matris cebri hakkında Ek'e bakınız).

En Küçük Kareler yöntemi sayesinde elde edilen parametre tahmincileri için (k tane) oluşturulan normal denklemler;

$$\hat{\beta}_0 n + \hat{\beta}_1 \sum x_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2} + ... + \hat{\beta}_k \sum x_{ik} = \sum y_i$$

$$\hat{\beta}_0 \sum x_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum x_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum x_{i1} x_{i2} + ... + \hat{\beta}_k \sum x_{i1} x_{ik} = \sum y_i x_{i1}$$

$$\hat{\beta}_0 \sum x_{i2} + \hat{\beta}_1 \sum x_{i1} x_{i2} + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2}^2 + ... + \hat{\beta}_k \sum x_{i2} x_{ik} = \sum y_i x_{i2} \text{ dir.}$$

En küçük kareler yöntemi sayesinde elde edilen parametre tahmincileri için oluşturulan normal denklemler matrisler türünden aşağıdaki gibi,

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i2} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i3} Y_i \\ . \\ . \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ik} Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} & . \; . & \sum_{i=1}^{n} X_{ik} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} X_{i2} & . \; . & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} X_{ik} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i2} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2}^2 & . \; . & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} X_{ik} \\ . & . & . & . \; . & . \\ . & . & . & . \; . & . \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ik} & \sum_{i=1}^{n} X_{ik} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{ik} X_{i2} & . \; . & \sum_{i=1}^{n} X_{ik}^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ . \\ . \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$$

ifade edilir (Dikmen, 2012).

Basit doğrusal regresyon modelini oluşturan parametrelerin tahmini için elde edilen matrisleri, çoklu doğrusal regresyon modeli için aşağıdaki gibi düzenlersek,

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & . & . & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & . & . & X_{2k} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & . & . & X_{nk} \end{bmatrix} \qquad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ . \\ . \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

ile gösterilir (Dikmen, 2012). Anakütle regresyon denklemi matris türünden, $Y = X\beta + \varepsilon$ yazılır. Burada, X, nxk boyutlu girdi ya da gözlem değerlerini; Y, nx1 boyutlu yanıt vektörünü; $\hat{\beta}$, kx1 boyutlu bilinmeyen katsayılar vektörünü; ε, nx1 boyutlu hata terimi ya da yanılgı vektörünü tanımlamaktadır.

Bu matrislerden hareketle,

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ X_{11} & X_{21} & . & . & . & X_{n1} \\ X_{12} & X_{22} & . & . & . & X_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ X_{1k} & X_{2k} & . & . & . & X_{nk} \end{bmatrix}$$ X matrisinin transpozu (devriği) yazılır (Dikmen, 2012).

X matrisi ve X matrisinin transpozunun (X') çarpımı ise aşağıdaki gibi,

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ X_{11} & X_{21} & . & . & X_{n1} \\ X_{12} & X_{221} & . & . & X_{n2} \\ . & . & . & . & . \\ X_{1k} & X_{2k} & . & . & X_{nk} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & . & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & . & X_{2k} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & . & X_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} & . & . & \sum_{i=1}^{n} X_{ik} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} X_{i2} & . & . & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} X_{ik} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i2} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2}^2 & . & . & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} X_{ik} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ik} & \sum_{i=1}^{n} X_{ik} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{ik} X_{i2} & . & . & \sum_{i=1}^{n} X_{ik}^2 \end{bmatrix}$$

elde edilir (Dikmen, 2012).

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ X_{11} & X_{21} & . & . & . & X_{n1} \\ X_{12} & X_{22} & . & . & . & X_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ X_{1k} & X_{2k} & . & . & . & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i2} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i3} Y_i \\ . \\ . \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ik} Y_i \end{bmatrix}$$ şeklinde elde edilir (Güriş ve Çağlayan, 2010).

Bu elde edilen matrisler ile normal denklemler vasıtasıyla elde edilen matrisler aynıdır. Bunu şu şekilde ifade etmek de mümkündür:

$X'Y = (X'X)\hat{\beta}$

Her iki tarafı $(X'X)^{-1}$ ile çarpıp, $\hat{\beta}$ 'yı yalnız bırakalım;

$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$ şeklinde formüle edilir. Bu formülü açık bir şekilde matris notasyonu ile yazalım;

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ . \\ . \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} & . \; . & \sum_{i=1}^{n} X_{ik} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} X_{i2} & . \; . & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} X_{ik} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i2} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2}^2 & . \; . & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} X_{ik} \\ . & . & . & . \; . & . \\ . & . & . & . \; . & . \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ik} & \sum_{i=1}^{n} X_{ik} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{ik} X_{i2} & . \; . & \sum_{i=1}^{n} X_{ik}^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i2} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i3} Y_i \\ . \\ . \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ik} Y_i \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki gibi ifade edilecektir. Buradan, sistemin çözümü sayesinde $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, ..., \hat{\beta}_k$ parametrelerini tahmin etmek mümkün olacaktır (Güriş ve Çağlayan, 2010).

Örnek 6.2. 2001-2013 yılları arasındaki Şekerpancarı verimine etki eden Eigs ve kullanılan gübre miktarları verilmiştir. Verimin, Eigs ve gübrenin bir fonksiyonu olduğu varsayımı ile oluşturulan çoklu doğrusal denkleminin parametrelerini matris yöntemiyle tahmin ediniz.

Çizelge 10. Türkiye'de Şekerpancarı Verimi, Gübre Kullanım Miktarları ve Erkek İşgücü Değerleri, 2001-2013

Yıl	Verim (10 Kg/da)	Gübre (10 Kg/da)	Eigs
2001	354	1,0	14,22
2002	444	1,1	13,21
2003	401	1,2	13,29
2004	429	1,0	13,40
2005	452	1,3	13,41
2006	446	1,4	13,59
2007	415	1,1	13,75
2008	482	1,2	13,54
2009	533	1,3	13,70
2010	545	1,2	15,20
2011	548	1,5	14,08
2012	532	1,4	14,20
2013	566	1,5	14,10

Y: Verim (10 Kg/da)
X_1: Gübre (10 Kg/da)
X_2: Eigs
Kaynak: Türkiye İstatistik Kurumu, 2014.

Çözüm için:

a. Gözlem değerlerinden yararlanarak X ve Y matrisi oluşturulur.

b. $X'X \; ve \; X'Y$ matrisi hesaplanır.

c. $X'X$ matrisinin tersi bulunur.

d. Formül gereği $X'X$ matrisinin tersi ile $X'Y$ matrisi çarpılır.

e. Buradan elde sonuçlardan yararlanarak tahmin edilen regresyon denklemi yazılır.

Matrisler ile parametre tahmini,

$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$ şeklinde formüle edilir. Bu formülü açık bir şekilde matris notasyonu ile yazalım;

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} X_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i2} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i2}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{i1} Y_i \\ \sum X_{i2} Y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 16{,}20 & 179{,}69 \\ 16{,}20 & 20{,}54 & 224{,}13 \\ 179{,}69 & 224{,}13 & 2487{,}23 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6147 \\ 7762{,}20 \\ 85168{,}94 \end{bmatrix}$$

$|X'X|$
=[13*20,54*2487,53+16,20*224,13*179,69+179,69*16,20*224,13]-[179,69*20,54*179,69+224,13*224,13*13+2487,23*16,20*16,20]

$|X'X|$=15,46

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|} adj(X'X) = \frac{1}{15{,}46} \begin{bmatrix} 853{,}45 & -19{,}21 & -59{,}93 \\ -19{,}21 & 45{,}50 & -2{,}71 \\ -59{,}93 & -2{,}71 & 4{,}58 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 55{,}20 & -1{,}24 & -3{,}88 \\ -1{,}24 & 2{,}94 & -0{,}18 \\ -3{,}88 & -0{,}18 & 0{,}30 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 6147 \\ 7762{,}20 \\ 85168{,}94 \end{bmatrix}$$

Elde edilen matrisler formülde yerine konulduğunda aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -439{,}95 \\ 264{,}69 \\ 42{,}18 \end{bmatrix}$$

Buna göre model,

$\hat{Y}_i = -439{,}95 + 264{,}69X_1 + 42{,}18X_2$ olarak tahmin edilir.

Sabit terim modelde $\hat{\beta}_0$ olarak bilinir ve tahmin edilen modeldeki değeri -439,95'dir. Gübre ve Eigs sıfır olduğunda verim -439,95'dir. Buna göre Eigs'i sabit tuttuğumuzda kullanılan gübre bir birim arttığında ortalama verim 264,69 (10 kg/da) birim artacaktır. Gübre sabit tutulduğunda Eigs bir birim arttığında ortalama verim 42,18 (10 kg/da) birim artacaktır.

6.4.2.1. Çoklu Doğrusal Regresyon Modelinde Tahmin Değerlerinin Yorumu

Sabit terim, bağımsız değişkenlerin her birinin sıfır olması durumunda bağımlı değişken Y'nin alacağı değeri ifade eder. Bağımsız değişken katsayılarının negatif veya pozitif olması değişimin hangi yönde seyrettiğini ifade edecektir. X_1 değişkeninin değişmediği varsayımı altında, X_2 değişkeninin Y üzerindeki etkisi $\hat{\beta}_2$ birim olacaktır. X_2 değişkeninin değişmediği varsayımı altında, X_1 değişkeninin Y üzerindeki etkisi $\hat{\beta}_1$ birim kadar olacaktır (Dikmen, 2012).

Bu açıklamalar ışığı altında, sabit terim modelde $\hat{\beta}_0$ olarak bilinir ve tahmin edilen modeldeki değeri -439,9520'dir. Gübre ve Eigs sıfır olduğunda verim -439,9520'dir. Buna göre Eigs'i sabit tuttuğumuzda kullanılan gübre bir birim arttığında ortalama verim 264,6885 (10 kg/da) birim artacaktır. Gübre sabit tutulduğunda Eigs bir birim arttığında ortalama verim 42,17499 (10 kg/da) birim artacaktır.

6.4.3. Parametre Tahmincilerinin Varyansları

$\hat{\beta}$'nın varyans-kovaryans matrisi yardımı ile,

$$V(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'$$

$= \sigma^2 (X'X)^{-1}$ olarak yazılır. (k+1)*(k+1) boyutlu bir matrisin köşegen öğeleri katsayıların varyansını vermektedir. Bu da,

$V(b_j) = \sigma^2 (X'X)^{-1}_{jj}$ şeklinde gösterilir. Varyans-kovaryans matrisi şu şekilde,

$$V(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} V(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2) & . & . & Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_k) \\ Cov(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_1) & V(\hat{\beta}_2) & . & . & Cov(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_k) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ Cov(\hat{\beta}_k,\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_k,\hat{\beta}_2) & . & . & V(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix}$$