10. EŞANLI DENKLEM SİSTEMLERİ

İktisadi olayların birden fazla denklem kullanılarak açıklanması gerekebilir. Bu çok denklem içeren model veya sistemler içinde bazı değişkenler hem bağımsız hem de bağımlı değişken olarak yer almaktadır. Bu tür sistemlerin eşanlı olarak çözülmeleri gerektiği için eşanlı denklem sistemleri adını alır (Güriş ve Çağlayan, 2010).

Ekonomik modelde var olan endojen (içsel) değişken sayısı kadar eşitlik sayısının bulunması modelin parametrelerinin tahmin edilebilmesi için gerekli bir koşuldur. Eğer bu koşul gerçekleşmezse, endojen değişkenlerin değerlerini model içinde belirlemenin imkanı yoktur (İşyar, 1994). Egzojen (dışsal) değişken, model sisteminin dışında belirlenir. Model içerisindeki içsel değişken veya değişkenlerin gecikmeli değerleri gecikmeli içsel değişken adını alırken, dışsal değişken veya değişkenlerin gecikmeli değerleri gecikmeli dışsal değişken adını almaktadır (Güriş ve Çağlayan, 2010).

10.1. Yapısal Modeller ve İndirgenmiş Formları

İktisadi ilişkileri gösteren birden fazla denklemli modeller "yapısal modeller" diye adlandırılır. Yapısal modellerde içsel değişkenler (Y_t), içsel değişkenlerin parametreleri (β), dışsal değişkenler (X), dışsal değişkenlerin parametreleri (τ) ile hata terimleri (ε_t) bulunur. Şimdi bu terimleri tanımlayalım (Özçelik, 1994).

Yapısal denklemler: İktisadi ilişkileri gösteren birden fazla denklemli model olan yapısal modelin denklemleridir.

İçsel değişken: Aldıkları değerler modelin yapısı ve dışsal değişkenler tarafından belirlenen değişkenlerdir.

Dışsal (önceden belli) değişken: Değerleri modelin yapısı ve modele ait diğer değişkenlerce etkilenmeyen fakat kendileri içsel değişkenlerin alacakları değerleri etkileyen değişkenlerdir.

Yapısal parametreler genellikle eğimler, esneklikler veya iktisat teorisinin başka parametreleridir. Bir yapısal parametre, her bir açıklayıcı değişkenin bağımlı değişken üzerindeki doğrudan etkisini gösterir. Dolaylı etkiler ancak yapısal denklem takımının çözümüyle bulunabilir (Özçelik, 1994).

Örnek 10.1. Yatırımdaki bir değişme, tüketimi dolaylı olarak etkileyebilir.

$$C_t = a + \beta Y_t + \varepsilon_t$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

Modeli yapısal bir modeldir. Bu modelde C_t ile Y_t içsel değişkenler, I_t ise dışsal değişkendir. Modeldeki denklemleri ε_t veya sıfıra eşitleyecek şekilde (gözlenebilen değişkenleri eşitliğin sol tarafına geçirerek) yazalım:

$$C_t - \beta Y_t - a = \varepsilon_t$$

$$-C_t + Y_t - I_t = 0$$

Çizelge 34. İçsel Değişkenler, Dışsal Değişkenler ve Hata Terimleri

İçsel Değişkenler		**Dışsal Değişkenler**		**Hata Terimleri**
C_t	Y_t	1	I_t	ε_t
1	-β	-a	0	1
-1	1	0	-1	0

Modelde bulunmasına karşılık, belli bir denklemde bulunmayan değişkenlerin parametreleri sıfır ile ifade edilmektedir. Bu yapısal model matrislerle şöyle gösterilebilir:

$$\beta Y_t + \Gamma X_t = \varepsilon_t$$

Burada;

β: İçsel değişkenlerin parametreleri $\begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

Y_t: İçsel değişkenler $\begin{bmatrix} C_t \\ Y_t \end{bmatrix}$ dir.

Γ : Dışsal değişkenlerin parametreleri $\begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dir.

X_t: Dışsal değişkenler $\begin{bmatrix} 1 \\ I_t \end{bmatrix}$ dir

ε_t : Hata terimleri $\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{bmatrix}$ dır.

O halde modeli matrislerle yazalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_t \\ Y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ I_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Şimdi, yapısal modelindeki birinci denklemi, ikinci denklemdeki yerine koyarak yazalım:

1) $C_t = a + \beta Y_t + \varepsilon_t$

2) $Y_t = C_t + I_t$

Burada C_t yerine birinci denklemi yazarsak:

$Y_t = a + \beta Y_t + \varepsilon_t + I_t$ elde edilir. Denklemin sağında içsel değişken bırakmamak için Y_t'leri eşitliğin sol tarafına geçirip bu ifadeyi Y_t parantezine alıp, Y_t'ye eşitleyelim:

$Y_t - \beta Y_t = a + I_t + \varepsilon_t$

$Y_t(1-\beta) = a + I_t + \varepsilon_t$

$Y_t(1-\beta) = \dfrac{a}{(1-\beta)} + \dfrac{1}{(1-\beta)} I_t + \dfrac{1}{(1-\beta)} \varepsilon_t$ elde edilir.

Şimdi ikinci denklemi, birinci denklemdeki yerine koyup, sağ tarafta hiçbir içsel değişken bulunmayan bir fonksiyon elde edelim.

$C_t = a + \beta Y_t + \varepsilon_t$ denklemi 1. denklemdir. Burada, Y_t yerine yapısal modeldeki ikinci denklemi yazarsak;

$C_t = a + \beta(C_t + I_t) + \varepsilon_t$ elde edilir. Burada, yeniden düzenleme yapılırsa,

$C_t = a + \beta C_t + \beta I_t + \varepsilon_t$ olur.

C_t'ler eşitliğin sol tarafına alınır ve bu ifade C_t parantezine alınırsa,

$C_t - \beta C_t = a + \beta I_t + \varepsilon_t$

$C_t(1-\beta) = a + \beta I_t + \varepsilon_t$

$C_t = \dfrac{a}{1-\beta} + \dfrac{\beta}{1-\beta} I_t + \dfrac{1}{1-\beta} \varepsilon_t$ bulunur.

Böylece yapısal modelde yer alan iki denklem üzerinde bazı işlemler yapılarak, her bir içsel değişken için yeni bir denklem bulunmuştur. Bu denklemlerin sağ tarafında içsel değişken bulunmamaktadır. Elde edilen

$$C_t = \frac{a}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta} I_t + \frac{1}{1-\beta} \varepsilon_t$$

$$Y_t = \frac{a}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} I_t + \frac{1}{1-\beta} \varepsilon_t$$

denklemleri "yapısal modelin indirgenmiş formunu" oluşturmaktadır. Bir yapısal modelin indirgenmiş formu, içsel değişkenlerin yalnızca önceden belirlenmiş değişkenlerin bir fonksiyonu olarak ifade edildiği modeldir. Bir yapısal modelde içsel değişken sayısı, denklem sayısına eşittir. Çünkü β matrisinin tersini bulmak için bu gereklidir. İndirgenmiş formda içsel değişken, modeldeki bütün önceden belli değişkenlerin ve hata terimlerinin doğrusal bir fonksiyonu olarak ifade edilmektedir.

Örneğimizdeki yapısal modelin indirgenmiş formu matrislerle şöyle ifade edilir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_t \\ Y_t \end{bmatrix}}_{Y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a}{1-\beta} & \frac{\beta}{1-\beta} \\ \frac{a}{1-\beta} & \frac{1}{1-\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ I_t \end{bmatrix}}_{\pi X_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{1-\beta}\varepsilon_t \\ \frac{1}{1-\beta}\varepsilon_t \end{bmatrix}}_{V_t}$$

$\beta Y_t + \Gamma X_t = \varepsilon_t$ şeklinde gösterilen bu yapısal modelin indirgenmiş formu:

$$\beta Y_t = -\Gamma X_t + \varepsilon_t$$

$$Y_t = -\beta^{-1}\Gamma X_t + \beta^{-1}\varepsilon_t$$

$Y_t = \pi X_t + v_t$ olmaktadır.

Yapısal modelin indirgenmiş formu şu yönlerden önemlidir:

a)Yapısal model parametreleri, indirgenmiş form parametreleri yardımıyla dolaylı şekilde (dolaylı enküçük kareler yöntemi, iki aşamalı enküçük kareler yöntemi) kullanılarak tahmin edilebilir.

b)İndirgenmiş form parametrelerinin yorumu iktisat teorisi ve iktisat politikası açısında önemlidir.

c)İndirgenmiş form denklemlerindeki önceden belli değişkenlerin katsayıları o değişkenlerin içsel değişkenler üzerindeki toplam etkisini belirtir. Makro ekonomik modellerde dışsal değişkenlere karşılık gelen indirgenmiş form parametreleri, dışsal değişkenlerin içsel değişkenler üzerindeki çarpan etkisini belirtir.

İndirgenmiş form parametreleri, dışsal değişkendeki değişmenin içsel değişkenler üzerindeki birbirini belirleyen içsel değişkenler arasındaki karşılıklı bağımlılığı da hesaba kattıktan sonra ki doğrudan ve dolaylı toplam etkisini ölçer. İndirgenmiş form parametreleri tahmin ve politika çözümlemeleri için kullanılırlar. Örneğimizde yatırımlardaki (I_t) bir birimlik artışın, gelir (Y_t) üzerindeki etkisini gelir fonksiyonundaki yatırım değişkenin katsayısı olan $1/(1\text{-}\beta_t)$'nin değerini tahmin etmekle, yatırımın (I_t) tüketim (C_t)

üzerindeki etkisini de, indirgenmiş formdaki $\beta/(1-\beta)$ değerini bulmakla cevaplamış oluruz.

İndirgenmiş formu bulmanın diğer bir yolu, içsel değişkenleri doğrudan, önceden belirlemiş değişkenlerin fonksiyonu olarak yazmaktır (Özçelik, 1994).

10.2. Belirlenme Sorunu

İndirgenmiş form parametrelerinden, yapısal modelin parametrelerini tek değerler halinde bulmak için hangi şartların gerekli ve yeterli olduğunu tespit etmek belirlenme sorunun konusunu oluşturur. Aynı değişkenleri, fakat farklı parametreleri bulunan yapısal modeller aynı indirgenmiş formu verebilmektir. İndirgenmiş form parametrelerinden yapısal modelin parametreleri için tek değerler bulabilmenin bazı şartları vardır ki bunlar gerçekleştiğinde model veya modeldeki herhangi bir denklem belirlenmiş olur. Birden çok denklemli ekonometrik modellerin parametrelerini tahmin için geliştirilmiş dolaylı en küçük kareler yönteminin uygulanabilmesi için tam belirlenme şartı aranmaktadır (Özçelik, 1994).

Bir modelin istatistik kalıbı tek ise ve örnek verilerinden parametreleri tek olarak tahmin edilebiliyorsa belirlenebilir bir modeldir. Parametrelerinin örnekteki ölçümlerle tahminleri sözkonusu modele başka bir modele ya da bir modeller karmasına ait olan model belirlenemez (Özçelik, 1994).

Modelin bütün olarak belirlenebilir olması için eksiksiz olması, yani en az içsel değişken sayısı kadar bağımsız denklem içermesi ve her denklemin kendi başına belirlenebilir olması gerekir.

D: talep miktarı, S: Arz miktarı, ve P: fiyat olsun. Bir mal için piyasadaki işleyiş şu modelle ifade edilsin.

$D=b_1 + b_2P+u$

$S=a_1 + a_2P+u$

$D=S$

Bu eşanlı denklem takımında birinci denklem talep fonksiyonu, ikinci denklem arz fonksiyonu, üçüncü denklem ise denge şartıdır. Denklem takımında üç denklem ve üç içsel değişken (S, D, P) olduğundan model eksiksizdir. Birinci denklemin katsayılarını tahmin edebilmek için malın satın alınan miktarlarının serisini bulmamız gerekir. Belli bir fiyattan satın alınan miktar, satılan miktara eşit olduğundan, piyasadan alınan veriler, o piyasada belli bir sürede geçerli olan fiyatta arz ve talep dengesini gösterir. Yani gözlemler geçerli fiyatta talep ve arz miktarlarını aynı anda gösterir. Eğer bu gözlem verilerini kullanarak $Q=f(P)$ fonksiyonun katsayılarını hesaplarsak, bu eşitliğin gerçekte talep mi yoksa arz fonksiyonu mu olduğundan emin olmak tahmin edilen katsayıların hangi ilişkiye ait olduğunu belirleyebilmek için bir ölçüte ihtiyaç vardır ki bu ölçütlere belirlenme şartları denilir.

Örnek gözlemlerinin serpilme diyagramına bakılarak ortaya bir talep mi yoksa arz eğrisi mi çıktığı teşhis edilirse de bu her zaman kesin doğru sonuç vermeyebilir. Çünkü verilerin arz ya da talep fonksiyonunu belirlediğini söyleyebilmek için arz ve talebi belirleyen diğer etmenlerdeki değişmeleri de bilmek lazımdır.

Talep fonksiyonunu belirleyebilmek için kendisinde bulunmayan ama arz fonksiyonunda yer alan bazı etmenlerin örnek döneminde değişmiş olmaları lazımdır. Arz fonksiyonunu ortaya çıkarabilmek için kendisinde bulunmayıp da talep fonksiyonunu etkileyen bazı değişkenlerin değişmiş olması lazımdır. Buna belirlenmenin çelişkisi denir.

Bir denklem takımının belirlenmesi tek tek denklemlerinin belirlenmesine indirgenir. Bir denklemin parametrelerinin belirlenmesi o denklemin istatistik kalıbının tek olmasının kanıtlanmasıyla sağlanır. Bir denklemin belirlenebilirliğinin iki durumu vardır.

a)Eksik belirlenmiş denklem

İstatistik kalıbı tek olmayan denklem eksik belirlenir. Denklemlerinden bir veya daha fazlası eksik belirlenen denklem takımı da eksik belirlenir (Özçelik, 1994).

b)Belirlenmiş denklem

İstatistik kalıbı tek olan denklem belirlenir. Bu belirlenme tam veya aşırı olabilir. Bütün denklemleri belirlenen bir denklem takımı da belirlenir. Bir denklem veya denklem takımı eksik belirlenmişse, parametrelerinin hepsini herhangi bir ekonometri tekniği kullanarak tahmin etmek imkansızdır. Bir denklem belirlenebiliyorsa genellikle katsayıları tahmin edilebilir. Tam belirlenen denklemler için katsayıların tahmininde kullanılacak en uygun yöntem Dolaylı En Küçük Karelerdir. Denklem aşırı belirleniyor ise bu defa İki Aşamalı En Eüçük Kareler Yöntemini kullanmak uygun olacaktır. Belirlenme yapısal modelin kuruluşunun incelenmesi veya indirgenmiş kalıbın incelenmesiyle anlaşılabilir (Özçelik, 1994).

10.2.1. Belirlenmenin Modelin Yapısal Kalıbından Anlaşılması

Bir denklemin belirlenebilmesi için belirlenmenin sayma koşulu ile rank koşulunun yerine gelmesi gerekir.

a) Belirlenmenin Sayma Koşulu

Belli bir denkleme alınan ve alınmayan değişkenlerin sayılması kuralına dayanır. Sayma koşulu, bir denklemin belirlenmesi için gerekli ancak yeterli değildir. Sayma koşuluna göre bir denklemin belirlenebilir olması için, bu denklemce dışlandığı halde diğer denklemlerde yer alan toplam değişken sayısının en az modelin denklem sayısının bir eksiği kadar olması lazımdır (Özçelik, 1994) (Koutsoyiannis, 1989).

$(K\text{-}M) \geq (G\text{-}1)$

Burada,

K: Modelin toplam değişken sayısı (içsel+dışsal)

M: Belli bir denklemdeki içsel ve dışsal değişken sayısı

G: Toplam denklem sayısı (toplam içsel değişken sayısı)

b) Belirlenmenin Rank Koşulu

G sayıda denklemi bulunan bir modelde herhangi bir denklemin belirlenebilmesi bu denklemde bulunmayan ancak modelin diğer denklemlerinde bulunan değişkenlerin katsayılarından, satır-sütun sayısı (G-1) olan sıfırdan farklı en az bir determinant oluşturulmasıyla mümkündür (Koutsoyiannis, 1989) (Özçelik, 1994).

Belirlenmenin rank koşuluyla ilgili süreç beş aşamadan oluşur:

1. Aşama: Modelin bütün denklemlerinin parametreleri ayrı bir çizelgeye yazılır. Modeldeki bir denklemde bulunmayan bir değişkenin parametresi yerine sıfır yazılır.

Örnek 10.2. Yapısal model şöyle olsun:

$Y_1=3Y_2-2X_1+X_2+u_1$

$Y_2=Y_3+X_3+u_2$

$Y_3=Y_1-Y_2-2X_3+u_3$

Bu modelde Y_1, Y_2, Y_3 içsel X_1, X_2, X_3 dışsal değişkenler u_1, u_2, u_3 ise hata terimleridir.

Yukarıdaki modelde yer alan denklemlerde bulunmayan bir değişkenin parametresi yerine sıfır yazarak eşitliğin solundaki değişkenleri eşitliğin sağına geçirip denklemleri sıfıra eşitleyerek yazarsak (Koutsoyiannis, 1989):

$-Y_1+3Y_2+0Y_3-2X_1+X_2+0X_3+u_1=0$

$0Y_1-Y_2+Y_3+0X_1+0X_2+0X_3+u_2=0$

$Y_1-Y_2-Y_3+0X_1+0X_2-2X_3+u_3=0$

denklemleri elde edilir.

Hata terimlerini dikkate almayarak modelin parametrelerini bir çizelgede gösterelim:

Çizelge 35. Değişkenlere İlişkin Katsayılar (1)

Denklemler	Değişkenler					
	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3
1. Denklem	-1	3	0	-2	1	0
2. Denklem	0	-1	1	0	0	1
3. Denklem	1	-1	-1	0	0	-2

2. Aşama: belirlenmesi incelenen denklemin katsayılarının bulunduğu satır çizilir (Koutsoyiannis, 1989). Örneğin ikinci denklemin belirlenmesini incelemek istiyorsak yukarıdaki çizelgede ikinci satırı çizerek çıkartırız.

3. Aşama: İncelenen ikinci denklemin sıfırdan farklı katsayılarının bulunduğu sütunlar da çizilerek çıkartılır. Geriye incelenen denklemde (ikinci denklem) bulunmayan, fakat modelin diğer denklemlerinde yer alan değişkenlerin katsayıları kalır (Koutsoyiannis, 1989).

Çizelge 36. Değişkenlere İlişkin Katsayılar (2)

Denklemler	Değişkenler					
	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3
1. Denklem	-1	3	0	-2	1	0
2. Denklem	0	1	1	0	0	1
3. Denklem	1	-1	-1	0	0	-2

Yapısal parametreler çizelgesinde açıklanan çizerek çıkarma işlemleri yapılınca, aşağıdaki dışlanmış değişkenlerin parametreler çizelgesi elde edilir.

Çizelge 37. Değişkenlere İlişkin Katsayılar (3)

Y_1	X_1	X_2
-1	-2	1
1	0	0

4. Aşama: Satır sütun sayısı (G-1) olan yani modeldeki denklem sayısından bir eksik satır ve sütunu bulunan determinantlar dışlanmış değişkenlerin parametreler çizelgesinden elde edilip değerleri hesaplanır. Bu determinantın veya determinantlardan en az birinin değerinin sıfırdan farklı çıkması durumunda, incelenen denklemin belirlenebilir olduğu anlaşılabilir.

Satır-sütun sayısı (G-1) olan bütün determinantların değerleri sıfırsa, bu denklemin eksik belirlendiği ortaya çıkar. Örneğimizdeki modelin, denklem sayısı üç olduğuna göre satır-sütun sayısı (G-1)=(3-1)=2 olan üç tane belirten dışlanmış değişkenlerin parametreler çizelgesinden elde edilebilir.

$|D_1| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0) - (2)(1) = 0 - 2 = -2$ olup $|D_1| \neq 0$ sıfırdan farklıdır

$$|D_2| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(0) - (1)(0) = 0 - 0 = 0 \quad \text{olup} \quad |D_2| = 0 \quad \text{sıfıra}$$

eşittir.

$$|D_3| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0) - (1)(1) = 0 - 1 = -1 \quad \text{olup} \quad |D_3| \neq 0 \quad \text{sıfırdan}$$

farklıdır

Görüldüğü üzere üç determinanttan ikisinin değeri sıfırdan farklıdır. Bir denklemin belirlenebilir olması için bu determinantlardan en az birisinin değerinin sıfırdan farklı olması yeterli olduğuna göre incelenen denklem (modelin ikinci denklemi) belirlenebilirdir.

5. Aşama: Denklemin tam ya da aşırı belirlendiğini tespit edebilmek için sıra koşulunun (K-M) $\geq$ (G-1) sağlanıp sağlanmadığı araştırılır.

(K-M) = (G-1) ise rank koşulunu da sağlamak şartıyla denklem tam belirlenir.

(K-M) $\geq$ (G-1) ise denklem aşırı belirlenir.

(K-M) $\leq$ (G-1) ise denklem eksik belirlenir.

Modelin incelenen ikinci denkleminde;

K=6, M=3, G=3'tür.

(6-3)>(3-1) ise denklem aşırı belirlenir.

3>2 olduğuna göre ele alınan denklem aşırı belirlenmektedir.

10.2.2. Belirlenmenin İndirgenmiş Kalıptan Tespiti

Bir modelin indirgenmiş kalıbına dayanan belirlenme koşulları da iki tane olup, birincisi sayma koşulu, ikincisi ise rank koşuludur (Koutsoyiannis, 1989).

a)Sayma Koşulu

Yapısal modeldekinin aynısıdır. Eşanlı denklem takımında belirlenme durumu incelenen denklemde (K-M) $\geq$ (G-1) koşulu sağlanıyorsa, sözkonusu denklem belirlenir.

Burada da K, M ve G sembolleri daha önceki anlamlarına sahiptirler (Koutsoyiannis, 1989).

b)Rank koşulu

G^* tane içsel değişkenli bir denklem, bu denklemde bulunmayan dışsal değişkenlerin indirgenmiş kalıp katsayılarından, satır-sütun sayısı G^*-1 olan, sıfırdan farklı en az bir tane determinant oluşturulabiliyorsa belirlenir.

İndirgenmiş kalıptan belirlenmenin tespitinde birinci aşama, yapısal modelin indirgenmiş kalıbını elde etmektir.

Örnek 10.3. Yapısal model şöyle olsun.

$$y_1 = 3y_2 - 2x_1 + 2x_2 + u_1$$

$$y_2 = y_3 + x_3 + u_2$$

$$y_3 = y_1 - y_2 - 2x_3 + u_3$$

Bu model üç içsel (y_1, y_2, y_3) ve iç dışsal (x_1, x_2, x_3) olmak üzere altı değişkeni kapsamaktadır.

Yapısal modelin denklemleri eşitliğin sol tarafında yalnız içsel, sağ tarafında ise yalnız dışsal değişkenler kalacak şekilde yazılırsa, yapısal modelin indirgenmiş kalıbı elde edilir.

$$y_1 = \pi_{11}x_1 + \pi_{12}x_2 + \pi_{13}x_3 = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$y_2 = \pi_{21}x_1 + \pi_{22}x_2 + \pi_{23}x_3 = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$y_3 = \pi_{31}x_1 + \pi_{32}x_2 + \pi_{33}x_3 = 2x_1 - x_2$$

Burada π 'ler yapısal parametrelerin fonksiyonlarıdır.

İkinci aşamada, bütün indirgenmiş kalıp katsayılarını kapsayan çizelge çıkarılır (Koutsoyiannis, 1989):

Çizelge 38. Değişkenlere İlişkin Katsayılar (4)

Denklemler	**Dışsal Değişkenler**		
	X_1	**X_2**	**X_3**
1. Denklem: y_1	π_{11}	π_{12}	π_{13}
2. Denklem: y_2	π_{21}	π_{22}	π_{23}
3. Denklem: y_3	π_{31}	π_{32}	π_{33}

π 'lerin değerini yazarsak indirgenmiş kalıp katsayıları çizelgesi:

Çizelge 39. İndirgenmiş Kalıp Katsayıları (1)

4	-2	3
2	-1	1
2	-1	0

Belirlenebilirliği incelenen denklemde bulunmayan satırı (örneğin birinci denklemde y olmadığı için üçüncü satırı) çizeriz. Daha sonra belirlenebilirliği araştırılan denklemde yer alan dışsal değişkenlerin bulunduğu sütunları (örneğin birinci denklemde x_1 ve x_2 olduğu için birinci ve üçüncü sütunları) çizeriz.

Üçüncü aşamada modelde bulunup belirlenebilirliği incelenen denklemde bulunmayan dışsal değişkenlerin π 'lerinden oluşan determinantın değeri hesaplanır. Eğer satır-sütun sayısı en büyük sıfırdan farklı determinantın satır-sütun sayısı G^*-1 ise denklem belirlenir aksi halde sözkonusu denklem belirlenemez (Koutsoyiannis, 1989). Şimdi örneğimizdeki birinci denklemin belirlenebilirliğini araştıralım:

Sayma koşulu $(K-M) \geq (G-1)$
$K=6, M=4, G=3$
$(K-M) \geq (G-1)$
$(6-4)=(3-1)$

2=2 olduğu için bu denklem belirlenme için sayma koşulunu sağlamaktadır.

Rank Koşulu:
Denklemde bulunmayan içsel değişken: y_3
Denklemde bulunan dışsal değişkenler: x_1 ve x_2

İndirgenmiş kalıp katsayıları çizelgesi:

Çizelge 40. İndirgenmiş Kalıp Katsayıları (2)

4	-2	3
2	-1	1
-2	-1	0

Denklemde bulunmayan dışsal değişkenlerin π 'ler çizelgesi:

3
1

Bu çizelgeden 1x1 boyutunda iki tane sıfırdan farklı determinant oluşturulabilir. Birinci denklemde iki tane içsel değişken (y_1 ve y_2) bulunduğundan G^*=2'dir. Dolayısıyla denklemde yer almayan x'lere ait π 'lerin determinantın boyutu (G^*-1)=1'dir.

Satır-sütun sayısı en büyük sıfırdan farklı belirtenin (örnekte 1x1 boyutunda 2 taneydi) satır-sütun sayısı (G^*-1)=1 olduğundan birinci denklem rank koşulunu sağladığı için belirlenebilmektedir. Ayrıca, rank koşulunun sağlanmış olması şartıyla birinci denklemde sayma koşulu K-M=G-1 şeklinde ortaya çıktığından bu denklem tam belirlenmektedir.

Modeldeki ikinci ve üçüncü denklemlerinde aynı şekilde belirlenebilirlikleri araştırıldığında ikinci denklemin hem sayma hem de rank koşullarını sağlayarak belirlenebilir olduğu üçüncü denklemin ise sayma koşulunu sağladığı halde rank koşulunu sağlayamaması sebebiyle belirlenemediği ortaya çıkmaktadır.

10.3. Eşanlı Denklem Yöntemleri

Birden çok denklemli ekonometrik modellerin parametrelerini tahmin edebilmek amacıyla kullanılan çeşitli yöntemler vardır. Bu yöntemlerden en fazla kullanılanları; tam belirlenme durumunda kullanılabilen "Dolaylı En Küçük Kareler Yöntemi" ile aşırı belirlenme halinde başvurulan "İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemi" dir. Modeldeki denklem sayısı arttıkça uygulamada aşırı belirlenme durumuyla daha sık karşılaşılabilmektedir.

10.3.1. Dolaylı En Küçük Kareler Yöntemi

Modelin denklemlerinin tam belirlenmiş olması şartıyla bu yöntem kullanılabilir. Yönteme göre modeldeki parametrelerin değerini hesaplama işlemi üç aşamada gerçekleştirilir:

Birinci aşamada, yapısal modeldeki denklemler içsel değişkenlerin dışsal değişkenlerin birer fonksiyonu olarak yazılır ve böylece yapısal modelin indirgenmiş formu elde edilir (Özçelik, 1994).

Örnek 10.4. D:talep miktarı, S: Arz miktarı, P: Fiyat, Y: Gelir, W: İklim indeksi olan eşanlı denklem şöyle olsun.

$$D = a_0 + a_1 P + a_2 Y + u_1$$

$$S = b_0 + b_1 P + b_2 W + u_2$$

D=S

Yapısal modelde D, S ve P içsel, Y ve W dışsal değişkenlerdir. Ardı ardına yerine koymalar ile indirgenmiş model şöyle olur:

$$D = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1} + \frac{a_2 b_1}{b_1 - a_1} y + \frac{-a_1 b_2}{b_1 - a_1} w + u_1$$

$$P = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} + \frac{a_2}{b_1 - a_1} y + \frac{-b_2}{b_1 - a_1} w + u_2$$

Bu yapısal modelin indirgenmiş halindeki katsayılar için π'ler kullanılırsa:

$$D = \pi_{10} + \pi_{11} Y + \pi_{12} W + V_1$$

$P = \pi_{20} + \pi_{21} Y + \pi_{22} W + V_2$ yazılır.

Burada;

$$\pi_{10=}\frac{a_0b_1 - a_1b_0}{b_1 - a_1}$$

$$\pi_{11} = \frac{a_2b_1}{b_1 - a_1}$$

$$\pi_{12} = \frac{-a_1b_2}{b_1 - a_1}$$

$$\pi_{20} = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1}$$

$$\pi_{21} = \frac{a_2}{b_1 - a_1}$$

$$\pi_{22} = \frac{-b_2}{b_1 - a_1}$$

$$V_1 = \frac{u_1b_1 - v_2a_1}{b_1 - a_1}$$

$$V_2 = \frac{u_1 - u_2}{b_1 - a_1}$$ olur.

İkinci aşamada, indirgenmiş kalıbın her bir denklemine en küçük kareler yöntemi uygulanarak indirgenmiş modelin katsayıları tahmin edilir (Koutsoyiannis, 1989). Örnekteki D, P, Y ve W'ye ait örnek gözlemleri kullanarak indirgenmiş kalıp denklemlerine birer birer en küçük kareler yöntemi tatbik edilerek katsayıları tahmin edilir (Özçelik, 1994).

Üçüncü aşamada, ikinci aşamada tahmin edilmiş olan indirgenmiş model parametreleri π 'ler kullanılarak katsayılar arası ilişkiler takımında π 'lerin yerine π 'ler konularak model yapısal parametreler (a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2) için çözülerek (Özçelik, 1994):

$$a_0 = \pi_{20} - (\frac{\pi_{10}}{\pi_{20}} - \frac{\pi_{12}}{\pi_{22}})$$

$$b_0 = \pi_{20} - (\frac{\pi_{10}}{\pi_{20}} - \frac{\pi_{11}}{\pi_{21}})$$

$$a_1 = \frac{\pi_{12}}{\pi_{22}}$$

$$b_1 = \frac{\pi_{11}}{\pi_{21}}$$

$$a_2 = \pi_{21} - (\frac{\pi_{11}}{\pi_{21}} - \frac{\pi_{12}}{\pi_{22}})$$

$$b_2 = \pi_{22} - (\frac{\pi_{12}}{\pi_{22}} - \frac{\pi_{11}}{\pi_{21}})$$ elde edilir.

10.3.2. İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemi

İki aşamalı en küçük kareler yönteminde yapısal denklemin parametrelerinin tahmin değerlerini hesaplama süreci iki aşamayı kapsamaktadır. Daha önce de ifade edildiği gibi bu yöntem, aşırı belirlenme durumunda geçerlidir (Özçelik, 1994).

Birinci aşamada π tahminlerini bulmak için indirgenmiş kalıp denklemlerine en küçük kareler yöntemi uygulanır. Yani parametreleri tahmin edilecek yapısal denklemin sağ tarafındaki içsel değişkenlerin hata terimi ile olan ilişkilerini ortadan kaldırmak amacıyla, bu içsel değişkenlerin teker teker modelde önceden bilinen (dışsal) değişkenler üzerindeki regresyonu bulunur (Özçelik, 1994).

Modeldeki i. yapısal denklemin genel ifadesi;

$Y_i = b_{i1}Y_1 + b_{i2}Y_2 + ... + b_{iG}Y_G + C_{i1}X_1 + ... + C_{ik}X_k + u$ olsun.

Burada

Y_i içsel değişkenleri (i=1,2,….,G)

X_i dışsal değişkenleri (i=1,2,….,k)

b: İçsel değişkenlerin parametreleri

C: Dışsal değişkenlerin parametrelerini göstermektedir.

Yapısal modelin, indirgenmiş formunun denklemleri:

$Y_1 = \pi_{11}X_1 + \pi_{12}X_2 + ... + \pi_{1k}X_k + V_1$

$Y_2 = \pi_{21}X_1 + \pi_{22}X_2 + ... + \pi_{2k}X_k + V_2$

……………………………………

……………………………………

$Y_G = \pi_{G1}X_1 + \pi_{G2}X_2 + ... + \pi_{Gk}X_k + V_G$ dir (Koutsoyiannis, 1989).

Her denklemde ayrı ayrı en küçük kareler yöntemini uygulamak suretiyle bulacağımız indirgenmiş form parametrelerinin tahminleri olan π ’leri kullanarak içsel değişkenlerin tahminleri ($\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, ..., \hat{Y}_G$) bulunur. İki aşamalı en küçük kareler yönteminde π ’ler kullanılarak, yapısal parametreler olan b ve c’ler tahmin edilmeyeceği için modeldeki tüm yapısal denklemlerdeki dışsal değişkenleri bilmekle ardışık yerine koymalar ile uğraşmadan indirgenmiş form modelinin genel bir gösterimi direkt olarak yazılabilir (Özçelik, 1994).

İkinci aşamada $\hat{Y}$'lar yapısal denklemlerde yerlerine konularak dönüştürülmüş fonksiyonlar elde edilir ve dönüştürülmüş yapısal denklemlere en küçük kareler yöntemi uygulanarak (İki aşamalı en küçük kareler tahminlerinin formülleri en küçük kareler yöntemininkiler ile aynıdır) yapısal parametrelerin İki aşamalı en küçük kareler tahminleri bulunur (Özçelik, 1994).

Bu aşamada, birinci aşamada hesaplanan içsel değişkenlerin teker teker modeldeki dışsal değişkenler üzerindeki regresyonları, içsel değişkenlerin orijinal değerleri yerine konularak yapısal denklemin parametreleri tahmin edilir (Özçelik, 1994).

$\hat{Y}$'ları yapısal denklemlerde yerine koyalım:

$$Y_i = b_{i1}\hat{Y}_1 + b_{i2}\hat{Y}_2 + ... + b_{iG}\hat{Y}_G + C_{i1}X_1 + ... + C_{ik}X_k + u_i^*$$

Burada;

$u_i^* = u_1 + b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + ... + b_{iG}v_G$ dir.

i. inci yapısal denklemin yukarıda da verilen genel gösterilişi:

$Y_i = b_{i1}Y_1 + b_{i2}Y_2 + ... + b_{iG}Y_G + C_{i1}X_1 + ... + C_{ik}X_k + u$ şeklinde idi. Şimdi bu denklemdeki y_i'lerin yerine;

$$y_1 = \hat{y}_1 + v_1$$

$$y_2 = \hat{y}_1 + v_1$$

…………

…………

$y_G = \hat{y}_G + v_G$ ifadelerini koyarsak denklem şu duruma gelir:

$$Y_i = b_{i1}(\hat{Y}_1 + v_1) + b_{i2}(\hat{Y}_2 + v_2) + ... + b_{iG}(\hat{Y}_G + v_G) + C_{i1}X_1 + ... + C_{ik}X_k + u_i$$

Bu denklemi de yeniden düzenleyerek dönüştürülmüş fonksiyon şöyle elde edilir:

$$Y_i = b_{i1}\hat{Y}_1 + b_{i2}\hat{Y}_2 + ... + b_{iG}\hat{Y}_G + C_{i1}X_1 + ... + C_{ik}X_k + (u_i + b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + ... + b_{iG}v_G)$$

İşte bu dönüştürülmüş yapısal denkleme en küçük kareler yöntemi uygulanarak, yapısal parametreler tahmin edilmektedir (Özçelik, 1994) (Koutsoyiannis, 1989).

Örnek 10.5. Piyasa dengesi, arz ve talep eğrilerinin kesiştiği ya da bu iki eğrinin birbirine eşitlendiği noktayı ifade etmektedir. Bu iki eğrinin kesiştiği noktaya karşılık gelen değer denge fiyatı, denge fiyatına karşılık gelen miktar ise denge miktarı olarak isimlendirilir. Piyasa denge modelini yazarak değişkenleri tanımlayınız?

Piyasa denge modelimizi şu şekilde ifade edelim:

$$Q_D = a_0 - a_1 P_t + a_2 Y_t + u_1$$
$$Q_S = b_0 + b_1 P_t + a_2 P_{t-1} + u_2$$
$$Q_D = Q_S$$

Burada;
Q_D: Talep miktarı
Q_S: Arz miktarı
P_t: t dönemi fiyatı
P_{t-1}: t-1 döneminde fiyat
Y_t: Gelir

Yukarıdaki eşanlı denklem modelinde piyasa fiyatı arz ve talebe göre belirlenmekte olup, Q_D, Q_S, P_t içsel değişkenlerdir. Y_t dışsal değişkeni, P_{t-1} ise gecikmeli dışsal değişkeni ifade eder.

Örnek 10.6. Aşağıdaki modellere bakarak davranış denklemi, tanım denklemi kavramlarını belirtiniz.

$C_t = a_0 + a_1 Y_t + u_t$ (Model 1)
$Y_t = C_t + I_t$ (Model 2)

Burada,
Model 1 davranış denklemidir çünkü parametreler ve hata terimi modelde yer almıştır. Model 2 ise davranış denklemidir çünkü tüketim (C_t) değişkeninin bileşenleri model içerisinde yer almıştır.

Örnek 10.7. Bir piyasada A malının arz ve talep dengesi aşağıda verilmiştir. Bu dengeyi gösteren eşanlı modelin yapısal katsayılarını tahmin ediniz?

Çizelge 41. Bir Piyasada A Malının Arz, Talep, Fiyat, Gelir ve Tüketim Değerleri

D (Ton)	**S (Ton)**	**P (TL/Kg)**	**Y (TL)**	**C (TL)**
12	12	8	18	3
14	14	8	23	5
18	18	6	23	4
18	18	6	33	6
23	23	5	33	6
22	22	5	38	8
28	28	4	42	6
33	33	3	42	8
35	35	3	38	8
45	45	3	28	7

$$D = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 Y + u_{1t}$$
$$S = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 C + u_{2t}$$
$$D=S$$

Eşanlı denklem sisteminde üç denklem, üç tane içsel değişken mevcuttur. İçsel değişkenler D, S ve P değişkenleridir. Yine, iki tane dışsal değişken Y ve C bulunmaktadır.

Eşanlı denklem sisteminde,

G: Toplam denklem sayısı : 3

K: Toplam değişken sayısı : 5

M: İncelenen denklemin değişken sayısı : 3 (1. denklem)

K-M = G-1

5-3=3-1

2=2 olduğu içi denklem tam belirlenmiştir.

İndirgenmiş kalıp modellerinde, içsel değişkenlerin yalnızca dışsal değişkenlerin birer fonksiyonu olarak ifade edilir.

Birinci aşamada, modelin indirgenmiş kalıp denklemleri aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$D = \frac{\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\beta_2\alpha_1}{\alpha_1 - \beta_1}Y + \frac{-\beta_1\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1}C + v_1$$

$$P = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}Y + \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1}C + v_2$$

Buradan indirgenmiş kalıp denklemlerini π'lere göre yazalım.

$$D = \pi_1 + \pi_2 Y + \pi_3 C + v_1$$
$$P = \pi_4 + \pi_5 Y + \pi_6 C + v_2$$

olur.

Buradan yeniden düzenleme yapıldığında,

$$\pi_1 = \frac{\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1}, \pi_2 = \frac{\beta_2\alpha_1}{\alpha_1 - \beta_1}Y, \pi_3 = \frac{-\beta_1\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1}C$$
$$\pi_4 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1}, \pi_5 = \frac{\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}Y, \pi_6 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1}C$$

sonucuna ulaşılır.

Yukarıda verilmiş Çizelge değerlerine göre indirgenmiş kalıp denklemi parametreleri olan π'lerin En Küçük Kareler (EKK) Yöntemi ile tahminlerini yapmak mümkündür.

Bir sonraki aşamada ise, yapısal kalıp katsayılarını hesaplayabiliriz. Bunun için de indirgenmiş kalıp katsayıları ve yapısal kalıp katsayıları arasındaki ilişkiden yararlanabiliriz.

$$D = 0{,}87 - 0{,}28Y + 5{,}38C \qquad R^2 = 0{,}51$$
$$P = 11{,}01 - 0{,}06Y - 0{,}64C \qquad R^2 = 0.68$$

Daha sonraki aşamada, yapısal kalıp parametreleri ve indirgenmiş kalıp parametreleri arasındaki ilişkiden hareketle,

$$\beta_0 = \pi_4\left(\frac{\pi_1}{\pi_4} - \frac{\pi_3}{\pi_6}\right)\alpha_0 = \pi_4\left(\frac{\pi_1}{\pi_4} - \frac{\pi_2}{\pi_6}\right)$$
$$\beta_1 = \frac{\pi_3}{\pi_6}\alpha_1 = \frac{\pi_2}{\pi_5}$$
$$\beta_2 = \pi_5\left(\frac{\pi_2}{\pi_5} - \frac{\pi_3}{\pi_6}\right)\alpha_2 = \pi_6\left(\frac{\pi_3}{\pi_6} - \frac{\pi_2}{\pi_5}\right)$$

α ve β değerleri hesaplanabilir. Modellerden değerler, eşitliklerde yerine konulduğunda aşağıdaki hesaplamalar yapılacaktır.

$$\beta_0 = \pi_4\left(\frac{\pi_1}{\pi_4} - \frac{\pi_3}{\pi_6}\right) = 11{,}01 * \left(\frac{0{,}87}{11{,}01} - \frac{5{,}38}{-0{,}64}\right) = 93{,}69$$
$$\beta_1 = \frac{\pi_3}{\pi_5} = \frac{5{,}38}{-0{,}06} = -8{,}43$$
$$\beta_2 = \pi_5\left(\frac{\pi_2}{\pi_5} - \frac{\pi_3}{\pi_6}\right) = -0{,}06 * \left(\frac{-0{,}28}{-0{,}06} - \frac{-5{,}38}{-0{,}64}\right) = -0{,}81$$
$$\alpha_0 = \pi_4\left(\frac{\pi_1}{\pi_4} - \frac{\pi_2}{\pi_5}\right) = 11{,}01 * \left(\frac{0{,}87}{11{,}01} - \frac{-0{,}28}{-0{,}06}\right) = -47{,}90$$
$$\alpha_1 = \frac{\pi_2}{\pi_5} = \frac{-0{,}28}{-0{,}06} = -4{,}43$$
$$\alpha_2 = \pi_6\left(\frac{\pi_3}{\pi_6} - \frac{\pi_2}{\pi_5}\right) = -0{,}64 * \left(\frac{5{,}38}{-0{,}64} - \frac{-0{,}28}{-0{,}06}\right) = 8.20$$
$$D = 93{,}69 - 8{,}43Y - 0.81C$$
$$S = -47{,}90 + 4{,}43P + 8{,}20C$$

olarak tahmin edilmiş olup, parametreler (eşanlı modelde) iktisadi teori beklentilerine uygun olarak elde edilmiştir.