2.1. ÖRNEK. *Bir çember şeklinde olup, uçları birbirine bağlı olan çubuktaki ısı akışı ele alınsın. Çember üzerindeki bir noktanın konumu θ açısal koordinatı ile belirlenebilir. Bir çember üzerindeki lineer uzaklık, açısal uzaklık ile orantılı olduğundan (r yarıçap ise $\Delta x = r\Delta\theta$) $u_t = k_0 u_{xx}$ ısı denklemi, $k = \frac{k_0}{r^2}$ olmak üzere,*

$$u_t = k u_{\theta\theta}$$

şeklinde, yeniden yazılabilir. Şimdi,

$$u(\theta, t) = \Theta(\theta) T(t)$$

şeklindeki çözümler aransın. Önceki gibi, bir A sabiti için

$$T(t)\, c_0 e^{Akt},\ \Theta(\theta) = c_1 \cos\theta\sqrt{-A} + c_2 \sin\theta\sqrt{-A} \tag{1}$$

bulunur. (Bu durumda, önceki örnekteki gibi

$$\begin{aligned} X(x) T'(t) &= kX''(x) T(t), \\ X(0) T(t) &= X(l) T(t) = 0 \end{aligned}$$

koşullar yoktur, çünkü, çubuğun uç noktaları yoktur). Bunun yerine, θ açısal koordinatı 2π nin tam katlarına kadar iyi tanımlı olduğundan, $\Theta(\theta)$ nın $2\pi-$periyotlu periyodik fonksiyon olması koşuluna gereksinim duyulur. Bu koşul, (1) daki c_1 vaya c_2 katsayılarını yok etmez, ama $\sqrt{-A}$ bir n tamsayısı olur. Böylece, seri çözümleri,

$$u(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + c_2 \sin n\theta)\, e^{-n^2 kt}$$

formunda elde edilir ve böyle seriler,

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + c_2 \sin n\theta)\, e^{-n^2 kt}$$

olmak üzere, $u(\theta, 0) = f(\theta)$ başlangıç koşulunu sağlayacaktır.

2.2. ÖRNEK. *l uzunluğunda, iki ucu sabitlenmiş, titreşen bir tel ele alınsın. Çözülecek problem,*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0 \tag{2}$$

şeklindedir. Eğer $u(x, t) = X(x) T(t)$ alınırsa (2) problemi

$$\begin{aligned} X(x) T''(t) &= c^2 X''(x) T(t) & (3) \\ X(0) &= X(l) = 0 & (4) \end{aligned}$$

olur. (3) formülü $c^2 X''(x)\, T(t)$ *ile bölünürse*

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)}$$

bulunur. Son eşitliğin iki tarafı bir sabite eşit olmalı, buna $-\lambda^2$ *denilirse* $(\lambda \in \mathbb{C})$ *böylece,*

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x)\,,\ T''(t) = -\lambda^2 c^2 X(x)$$

bulunur. Bu adi diferensiyel denklemin genel çözümleri

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

ve

$$T(t) = X(x) = c_3 \cos \lambda ct + c_4 \sin \lambda ct$$

şeklindedir. Isı denkleminde olduğu gibi, (4) sınır koşullarından

$$c_1 = 0 \text{ ve } \lambda = \frac{n\pi}{l},\ (n \text{ pozitif tamsayı})$$

bulunur. Buradan, seri çözümleri

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{l}\left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + \sin \frac{n\pi ct}{l}\right) \tag{5}$$

olarak elde edilir. Bu problem için uygun başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

olur. (5) de $t = 0$ *alınırsa*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin n\pi x}{l}$$

bulunur. Aynı zamanda, eğer (5) formülünün t ye göre türevi alınırsa (sonsuz serinin terim terim türevlenebilmesi konusundaki problem, şimdilik göz ardı edilirse)

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} b_n \frac{\sin n\pi x}{l}$$

elde edilir. Böylece, bir kez daha, f *ve* g *yi*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

formundaki bir sinüs serisine açma problemine ulaşılır.

2.3. TANIM. α_n *ve* β_n *isteksel olarak verilen katsayılar olmak üzere*

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

şeklindeki bir seriye trigonometrik seri denir.