FOURIER SERİSİ

Periyodik Bir Fonksiyonun Fourier Serisi

f, reel eksen üzerinde tanımlı, her θ için $f(\theta+2\pi)=f(\theta)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. (Böyle fonksiyonlara, $2\pi-$*periyotlu periyodik fonksiyon* denir). f fonksiyonunun her sınırlı aralıkta Riemann integrallenebilir olduğu kabul edilsin. Ayrıca, kompleks eksponensiyel fonksiyonlar kullanılacağı için, f kompleks değerli olarak alınacaktır. Bu durumda, f fonksiyonunun

$$f(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right) \tag{1}$$

serisine açılıp açılmadığını bilmek önemlidir. $\cos n\theta=\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$ ve $\sin n\theta=\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2}$ formülleri yardımı ile (1) formülü, yeniden

$$f(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\theta} \tag{2}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki katsayılar

$$c_0=\frac{a_0}{2},\ c_n=\frac{1}{2}\left(a_n-ib_n\right)\ \text{ve}\ c_{-n}=\frac{1}{2}\left(a_n+ib_n\right)\ (n\in\mathbb{N}) \tag{3}$$

$$a_0=2c_0,\ a_n=c_n+c_{-n}\ \text{ve}\ b_n=i\left(c_n-c_{-n}\right) \tag{4}$$

şeklindedirler.

Genel periyodik fonksiyonlar, trigonometrik seriler cinsinden analiz edilirken, ilk adım olarak şu soru ele alınır;

Eğer f nin (2) formunda bir seri açılımının var olduğu biliniyorsa, c_n katsayıları f cinsinden nasıl hesaplanır?

Serinin terim terim integrallenebilir olduğu varsayılsın. Bu durumda, (2) nin iki tarafı $e^{-ik\theta}$ $(k\in\mathbb{Z})$ ile çarpılıp, $-\pi$ den π ye integre edilerek $c_n$katsayıları

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,e^{-in\theta}d\theta \tag{5}$$

bulunur. (4) den a_n ve b_n katsayıları

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos n\theta d\theta\quad\left(n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right),\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin n\theta d\theta\quad(n\in\mathbb{N}) \tag{6}$$

olarak bulunur. Eğer f, Riemann integrallenebilen, periyodik bir fonksiyon ise, (5) ve (6) integralleri, a_n, b_n ve c_n katsayılarını tanımlamak için kullanılabilir.

3.1. TANIM. *f, $2\pi-$periyotlu periyodik ve $[-\pi,\pi]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. (5) ile tanımlanan c_n ve (6) ile tanımlanan a_n, b_n sayılarına, f fonksiyonunun Fourier katsayıları ve bunlara karşılık gelen*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \text{ veya } \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right) \tag{7}$$

serilerine f fonksiyonunun Fourier serisi denir.

3.2. LEMMA. *F integrallenebilen, $p-$periyotlu periyodik bir fonksiyon ise $\int\limits_a^{a+p} F(x)\,dx$ integrali a dan bağımsızdır.*

Böylece, (5) ve (6) formüllerinde, integraller herhangi 2π uzunlukta bir aralık üzerinden alınabilir.

3.3. LEMMA. (6) *formülleri için eğer,*

$$\begin{aligned} f \text{ çift ise } a_n &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta \text{ ve } b_n=0, \\ f \text{ tek ise } a_n &= 0 \text{ ve } b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta \end{aligned}$$

olur.

3.4. UYARI. *$2\pi-$periyotlu periyodik bir f fonksiyonunun Fourier serisi, (1) trigonometrik formda veya (2) eksponensiyel formda yazılsın, serideki sabit terim*

$$c_0=\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta$$

şeklindedir. Bu da f nin $[-\pi,\pi]$ aralığındaki ortalama değeridir.

3.5. ÖRNEK. *$f(\theta)=|\theta|$, $-\pi\le\theta\le\pi$, $2\pi-$periyotlu periyodik fonksiyonu alınsın. Lemma den, f çift olduğundan $b_n=0$ ve*

$$\begin{aligned} a_0 &= \pi, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\begin{cases} -\frac{2}{n^2}, & n \text{ tek ise} \\ 0, & n \text{ çift ise}\end{cases} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, f nin Fourier serisi

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n \text{ tek} \\ (n=1,3,5,\ldots)}}\frac{1}{n^2}\cos n\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2k-1\right)\theta}{\left(2k-1\right)^2} \tag{8}$$

bulunur.

3.6. ÖRNEK. $g\left(\theta\right)=\theta,\ -\pi<\theta\leq\pi,\ 2\pi-$*periyotlu periyodik fonksiyonu için,*

$$c_0=0,\ c_n=\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{in}$$

olup, g nin Fourier serisi

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{\left(-1\right)^{n+1}e^{in\theta}}{in}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}e^{in\theta}}{in}$$

olarak *bulunur.*

3.7. ÖRNEK. $f\left(\theta\right)=\left\{\begin{smallmatrix}0; & -\pi<\theta<0\\ \theta; & 0<\theta<\pi\end{smallmatrix}\right.$ $2\pi-$*periyodik fonksiyonu için*

$$a_0=\frac{\pi}{2},\ \ a_n=\begin{cases}\frac{-2}{n^2\pi}, & n \text{ tek}\\ 0, & n \text{ çift}\end{cases},\ \ b_n=\frac{\left(1\right)^{n+1}}{n}$$

olup, f nin Fourier serisi

$$\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}\cos\left(2n-1\right)\theta+\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin n\theta\right)$$

şeklindedir.