Aşağıda, temel yakınsaklık teoremi verilmektedir.

6.1. TEOREM. $2\pi-$*periyodik bir* f *fonksiyonu* $\mathbb{R}$ *üzerinde parçalı düzgün ve* f nin Fourier serisinin n nci kısmi toplamı $S_N(f)(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{N}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ *olsun. Bu durumda, her* θ *için*

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$$

gerçeklenir. Özellikle, f *nin sürekli olduğu her* θ *noktasında*

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta) = f(\theta)$$

olur.

6.2. SONUÇ:

1. $f(\theta) = |\theta|$ *fonksiyonu parçalı düzgün ve her yerde süreklidir. Böylece, Fourier serisi her* θ *noktasında* $f(\theta)$ *ya yakınsar, dolayısıyla*

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\theta}{(2k-1)^2} = |\theta|, \quad -\pi \le \theta \le \pi \tag{1}$$

olur.

2. $g(\theta) = \theta$ *fonksiyonu parçalı düzgün ve* k *tek olmak üzere,* $\theta = k\pi$ *noktaları hariç süreklidir. Bu süreksizlik noktalarında tek taraflı limitler*

$$g(k\pi-) = \pi, \; g(k\pi+) = -\pi$$

olur ve

$$\frac{1}{2}[g(k\pi-) + g(k\pi+)] = 0$$

gerçeklenir. Böylece, g *fonksiyonunun Fourier serisi, sıfıra yakınsadığı* $\theta = k\pi$ *noktaları hariç, tüm noktalarda* $g(\theta)$ *değerine yakınsar. Buradan,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\theta = \frac{\theta}{2}, \quad -\pi < \theta < \pi \tag{2}$$

bulunur.

3. *(1) de* $\theta = 0$ *alınırsa*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

elde edilir.

4. *(2) de* $\theta = \frac{\pi}{2}$ *alınırsa*

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} -1, 1; \ n \text{ tek} \\ 0; \ n \text{ çift} \end{cases}$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots = \frac{\pi}{4}$$

bulunur.

6.3. UYARI. *6.1.Teorem,* $2\pi-$*periyodik, parçalı düzgün bir* f *fonksiyonunun, süreksizlik noktalarında sağ ve sol limitlerinin ortalaması olarak yeniden tanımlanması koşulu ile,* f *fonksiyonunun Fourier serisinin, her yerde* f ye *yakınsadığını söyler.*

6.4. SONUÇ. f *ve* g *fonksiyonları,* $2\pi-$*periyodik, parçalı düzgün ve aynı Fourier katsayılarına sahip olsunlar. Bu durumda,* $f = g$ *olur.*

6.5. ÖRNEK. $f(\theta) = \theta^2, \ -\pi < \theta < \pi, \ 2\pi-$periyodik sürekli fonksiyonunun Fourier serisi her θ için

$$\theta^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\theta$$

toplamına sahiptir. Burada, $\theta = \pi$ alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ve $\theta = 0$ alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

bulunur.

6.6. ÖRNEK. $f(\theta) = \sinh\theta, \; -\pi < \theta < \pi$, $2\pi-$periyodik fonksiyonunun Fourier serisi

$$\frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}\sin n\theta$$

olarak bulunur.