TÜREVLER İNTEGRALLER VE DÜZGÜN YAKINSAKLIK

Bu kısımda, sürekli ve parçalı düzgün olan $2\pi-$periyodik $f$onksiyonlar ele alınacaktır. Böyle bir fonksiyonun grafiği, türevin sıçramalara sahip olduğu yerlerde köşelere sahiptir. f sürekli ve parçalı düzgün olmak üzere, integral hesabın temel teoreminden

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(\theta)\, d\theta$$

yazılabilir. Aşağıdaki teorem, bir fonksiyonun Fourier katsayıları ile, türevinin Fourier katsayıları arasındaki ilişkiyi verir.

7.1. TEOREM. *f fonksiyonu, $2\pi-$periyodik, sürekli parçalı düzgün olsun. a_n, b_n ve c_n, f nin, sırasıyla,*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta \ ve\ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta} d\theta$$

ile verilen Fourier katsayıları a_n', b_n' ve c_n', f' türevinin Fourier katsayıları olsunlar. Bu durumda,

$$a_n' = nb_n,\ b_n' = -na_n \text{ ve } c_n' = inc_n$$

gerçeklenir.

7.2. TEOREM. *f fonksiyonu, $2\pi-$periyodik, sürekli parçalı düzgün ve f' de parçalı düzgün olsun. Eğer*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$f(\theta)$ nın Fourier serisi ise $f'(\theta)$ nın var olduğu her θ noktasında

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos n\theta - na_n \sin n\theta)$$

türetilmiş serinin toplamı $f'(\theta)$ olur, $f'(\theta)$ nın sıçrama noktalarında, seri, $\frac{1}{2}[f'(\theta-) + f'(\theta+)]$ değerine yakınsar.

7.3. ÖRNEK. $f(\theta) = \begin{cases} 0, & -\pi < \theta < 0 \\ \theta, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \pi - \theta, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$ *olarak verilen f fonksiyonu, $2\pi-$periyodik, $\mathbb{R}$ de sürekli olup, f ve f' parçalı düzgündür. Böylece, f' nün Fourier serisi*

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\cos(2k-1)\theta + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2(2k-1)\theta)$$

olarak *bulunur. f', $\theta = 0$ noktasında sıçramaya sahip olduğundan*

$$\frac{1}{2}[f'(0-) + f'(0+)] = \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

bulunur ve buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

elde edilir.

7.4. UYARI. P*eriyodik bir fonksiyonun Fourier serisinin sabit terimi sıfır ise integrali periyodiktir.*

7.5. TEOREM. *f fonksiyonu, $2\pi-$periyodik, parçalı sürekli, Fourier katsayıları a_n, b_n, c_n, ve $F(\theta) = \int_0^{\theta} f(\phi)\,d\phi$ olsun. Eğer $c_0\left(= \frac{a_0}{2}\right) = 0$ ise her θ için*

$$\begin{aligned} F(\theta) &= C_0 + \sum_{n\neq 0}\frac{c_n}{in}e^{in} \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin n\theta - \frac{b_n}{n}\cos n\theta\right) \end{aligned} \tag{1}$$

bulunur, buradaki sabit terim, F nin $[-\pi, \pi]$ aralığındaki ortalama değeridir; yani

$$C_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\,d\theta \tag{2}$$

olur. (1) in sağındaki seri, yakınsak olsun ya da olmasın f nin Fourier serisinden terim terim integre edilerek elde edilen seridir. Eğer $c_0 \neq 0$ ise serinin toplamı $F(\theta) - c_0\theta$ olur.

7.6. ÖRNEK. $f(\theta) = \begin{cases} -1, & -\pi < \theta < 0 \\ 1 & 0 < \theta < \pi \end{cases}$ *periyodik fonksiyonu alınsın, bu durumda*

$$F(\theta) = \int_0^\theta f(\phi)\, d\phi$$

olmak üzere, $F(\theta) = |\theta|$ *olur.* f *nin Fourier serisi*

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1}$$

şeklindedir. Böylece, 7.1. Teorem kullanılarak,

$$F(\theta) = C_0 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}$$

bulunur, buradaki C_0 *katsayısı*

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\theta|\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

şeklindedir, buradan, $F(\theta) = |\theta|$ *fonksiyonunun Fourier serisi elde edilir.*

7.7. UYARI. *6.1. Teorem,* f *nin Fourier serisinin* f *ye noktasal yakınsak olduğu koşulları vermektedir. Sonsuz seriler ile çalışırken, serinin mutlak ve düzgün yakınsaklığı çok kullanışlı olmaktadır.*

7.8. TANIM. *Bir* S *kümesi üzerinde* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ *serisi* $g(x)$ *fonksiyonuna yakınsasın. Eğer* $x \in S$ *için* $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)|$ *serisi de yakınsak ise* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ *serisi mutlak yakınsaktır denir. Ayrıca, eğer*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in S} \left| g(x) - \sum_{n=1}^{N} g_n(x) \right| = 0$$

ise yakınsama düzgündür denir.

Mutlak ve düzgün yakınsaklık için en kullanışlı kriter, Weierstrass-M testidir.

7.9. TEOREM. *(Weierstrass-M testi) Eğer* $x \in S$ *için*

$$|g_n(x)| \leq M_n \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir M_n *dizisi varsa bu durumda* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ S *üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.*