Fourier serileri durumunda;

$$|a_n \cos n\theta| \leq |a_n|\,, \quad |b_n \sin n\theta| \leq |b_n|$$

ve

$$\left|c_n e^{in\theta}\right| = |c_n|$$

olacağından, eğer

*(i)* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,\ \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$ ise, Fourier serisinin *trigonometrik formuna,*

*(ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$ ise, Fourier serisinin *üstel formuna*

Weierstrass-$M$ testi uygulanır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \text{ ve } c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)\ \ (n \in \mathbb{N}) \\ a_0 &= 2c_0,\ a_n = c_n + c_{-n} \text{ ve } b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

denklemlerinden, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$ koşullarının, $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$ koşuluna denk olduğu görülür. Bunların sağlanması için yeter koşullar aşağıdaki teoremde verilmektedir.

**9.1. TEOREM.** *$f$ fonksiyonu $2\pi-$periyodik, sürekli ve parçalı düzgün ise $f$ nin Fourier serisi $f$ ye $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.*

**9.2. ÖDEV.** *$f'' \in C[-\pi,\pi]$ iken $f$ nin Fourier serisinin $f$ ye mutlak ve düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.*

**9.3. UYARI.** *$2\pi-$periyodik bir $f$ fonksiyonunun Fourier serisinin düzgün (hatta noktasal) yakınsaklığı için $f$ nin sürekliliği yeterli olmamaktadır. Buna ilişkin ilk örneği 1873 yılında du Bois-Reymond vermiştir (P. du Bois-Reymond, Ueber die fourierschen reihen, Nachr. Kön.Ges. Wiss. Göttingen 21 (1873), 571–582).*

**UYARI** : $C[-\pi,\pi]$, $\|f\| = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$ normu *ile bir Banach uzayı olup, Fourier serisinin $n$ nci kısmi toplamı olan $S_n$ operatörü*

$$\begin{aligned} S_n &: C[-\pi,\pi] \to C[-\pi,\pi], \\ S_n(f;x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, dt \end{aligned}$$

*şeklinde bir lineer operatördür* ($D_n :$ $n$ nci Dirichlet çekirdeği) *ve her* $f \in C[-\pi,\pi]$ *için*

$$\|S_n(f)\| \le \|f\| \, L_n$$

*olur, buradaki*

$$L_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \, dt$$

*sayılarına Lebesgue sabitleri denir.*

Bu durumda aşağıdaki teorem vardır:

**9.4. TEOREM.** $S_n$, $f \in C[-\pi,\pi]$ *fonksiyonunun Fourier serisinin* $n-$*nci kısmi toplamı olmak üzere,*

$$\begin{array}{l} a)\ \|S_n\| = L_n, \\ b)\ L_n = \frac{4}{\pi^2 \log n} + O(1) \end{array}$$

*gerçeklenir.*

**9.5. TEOREM.** *(Düzgün Sınırlılık Prensibi)* $X$ *bir Banach uzayı,* $Y$ *bir normlu uzay ve* $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ $BL(X,Y) := \{T \mid T : X \to Y,\ \text{sınırlı, lineer}\}$ *uzayında bir operatör ailesi olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:*

*a)* *her* $x \in X$ *için* $\sup\{\|T_\lambda(x)\|_Y : \lambda \in \Lambda\} < \infty$,

*b)* $\sup\{\|T_\lambda\| : \lambda \in \Lambda\} < \infty$.

9.4. ve 9.5. teoremleri ve Düzgün Sınırlılık Prensibinden, aşağıdaki sonuç elde edilir:

**9.6. TEOREM.** *Bir* $x \in \mathbb{R}$ *noktasında, Fourier serileri yakınsak olmayan sürekli* $2\pi-$*periyodik fonksiyonlar vardır.*

**9.7. UYARI.** *Bir* $\{a_n\}$ *dizisi* $a$ *sayısına yakınsak ise* $\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} a_n$ *ortalaması da* $k \to \infty$ *iken* $a$ *ya yakınsar. Ancak, karşıtı doğru değildir.*

**9.8. ÖRNEK.**

$$1, 0, 1, 0, \ldots$$

*dizisi ıraksaktır. Buna karşılık, ilk* $k$ *terimin ortalaması*

$$\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} a_n = \begin{cases} \frac{k+1}{2k}, & k \text{ tek} \\ \frac{1}{2}, & k \text{ çift} \end{cases}$$

olup,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k} a_n = \frac{1}{2}$$

*yakınsaktır.*

**9.9. TANIM.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *serisinin kısmi toplamlar dizisi* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ *olsun. Serinin ilk* $n$ *kısmi toplamının ortalamasına*

$$\frac{1}{n}\left(S_0 + S_1 + ... + S_{n-1}\right)$$

*Cesàro ortalaması denir.*

**9.10. TANIM.** *Eğer, Cesàro ortalaması bir* $S$ *sayına yakınsak ise seriye,* $S$ *sayısına Cesàro toplanabilirdir denir.*