FEJER ÇEKİRDEĞİ

Fejer, $f \in C[-\pi,\pi]$ fonksiyonunu Fourier serisinden elde etmek için S_n kısmi toplamlarının Cesàro ortalamasını almıştır: Buna göre, $f \in C[-\pi,\pi]$ fonksiyonunun Fourier serisinin n nci kısmi toplamı

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

ve

$$S_0(f)(x) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt,$$

olmak üzere, n nci Fejer toplamı

$$\begin{aligned} \sigma_n(f)(x) &= \frac{1}{n}[S_0(f)(x) + ... + S_{n-1}(f)(x)] \qquad (1)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, F_n(x-t)\, dt, \qquad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

olarak yazılır, buradaki

$$F_n := \frac{1}{n}[D_0 + ... + D_{n-1}]$$

fonksiyonuna Fejer çekirdeği denir. Buradan, $t \neq 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ için

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{\cos kt - \cos(k+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}}\right] \\ &= \frac{1}{2n}\frac{1-\cos nt}{\sin^2\frac{t}{2}} \\ &= \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{n\sin^2\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

olarak bulunur. $\left(F_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{n \sin^2 \frac{t}{2}} \text{ fonksiyonunun sürekli devamı olarak}\right)$ $t = 2k\pi$ için $D_k(t) = 2k+1$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{1}{n}[D_0(t) + ... + D_{n-1}(t)] \\ &= \frac{1}{n}[1 + 3 + \cdots + 2k - 1] \\ &= n \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, Fejer çekirdeğinin fonksiyon olarak ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$F_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{n \sin^2 \frac{t}{2}}; & t \neq 2k\pi \\ n; & t = 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(Periyodiklikten, sadece $[-\pi, \pi]$ aralığında inceleme yapmak yeterlidir).

10.1. TEOREM. *$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\, dt = 1$ sağlanır.*

İspat. $f = 1$ sabit fonksiyonu için $S_n(1)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt = 1$ ve

$$\begin{aligned} \sigma_n(1)(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_n(1)(x) \\ &= \frac{1 + 1 + \cdots + 1}{n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan, (1) formülünden

$$\sigma_n(1)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{n \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 1$$

elde edilir.

10.2. PROBLEM. *F_n çekirdeği $n - 1$ nci dereceden, negatif olmayan, çift bir trigonometrik polinomdur.*

İspat. $t \in \mathbb{R}$ için Fejer çekirdeği, $D_k\left(t\right) = \frac{1}{2\pi}[1+2\cos t+\cdots+2\cos kt]$ Dirichlet çekirdeği cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned}
F_n\left(t\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k\left(t\right) \\
&= \frac{1}{n}\left[1 + \left(1 + 2\cos t\right) + \left(1 + 2\cos t + 2\cos 2t\right) + \cdots + \left(1 + 2\cos t + 2\cos 2t + \cdots + 2\cos\left(n -\right.\right.\right. \\
&= \frac{1}{n}\left[n + \left(n-1\right) 2\cos t + \left(n-2\right) 2\cos 2t + \cdots + \frac{2}{n}\cos\left(n-1\right) t\right] \\
&= 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\cos kt
\end{aligned}$$

bulunur, bu ifade, $(n-1)$ nci dereceden çift bir trigonometrik polinomdur.

10.3. TEOREM. *F_n Fejer çekirdeği $\delta > 0$ olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlar:*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{\delta\le|t|\le\pi}\left|F_n\left(t\right)\right| = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\left|F_n\left(0\right)\right| = \infty.$$

İspat. $F_n\left(t\right) \geq 0$ ve çift bir fonksiyon olduğu göz önünde bulundurulursa, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ eşitsizliği kullanılarak

$$\max_{\delta\le|t|\le\pi}\left|F_n\left(t\right)\right| = \max_{t\ge\delta}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{n\sin^2\frac{t}{2}} \leq \max_{t\ge\delta}\frac{\pi^2}{nt^2} = \frac{\pi}{n\delta^2}$$

bulunur. Buradan da $\lim_{n\to\infty}\max_{\delta\le|t|\le\pi}\left|F_n\left(t\right)\right| = 0$ elde edilir. Diğer taraftan, Fejer *çekirdeğinin sürekli genişlemesi* $F_n\left(0\right) = \frac{n}{2\pi}$ *için*

$$\lim_{n\to\infty}\left|F_n\left(0\right)\right| = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

olacağı açıktır.

Fejer çekirdeğinin özellikleri kullanılarak, sürekli $2\pi-$periyodik fonksiyonlara Fejer operatör dizisi ile düzgün yaklaşım elde edilir. Bu sonuç, aşağıdaki teoremde ifade edilmektedir.

10.4. TEOREM. *$f \in C[-\pi,\pi]$ ise*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sigma_n\left(f\right) - f\right\|_{C[-\pi,\pi]} = 0$$

gerçeklenir.

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin. $f \in C[-\pi, \pi]$ olduğundan düzgün süreklidir, dolayısı ile, bir $\delta > 0$ sayısı, herhangi bir x için, $|t| < \delta$ iken $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabilir, ayrıca, f, $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sınırlıdır. $F_n(t) \geq 0$ ve integrali 1 olduğundan

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) \, dt - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] F_n(t) \, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \, F_n(t) \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|t|<\delta} + \int_{|t|\geq\delta} \right) |f(x+t) - f(x)| \, F_n(t) \, dt
\end{aligned}$$

yazılabilir. Verilen $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı, $\forall n \geq n_0$ ve $|t| \geq \delta$ için $|F_n(t)| < \frac{\varepsilon}{4\|f\|\pi}$ olacak şekilde vardır. Böylece,

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(f)(x) - f(x)| &\leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} F_n(t) \, dt + 2\|f\| \frac{1}{2\pi} \int_{|t|\geq\delta} F_n(t) \, dt \\
&< 2\varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliği, $\forall x \in [-\pi, \pi]$ ve $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ için sağlanır. Periyodiklikten, her $x \in \mathbb{R}$ için sonuç elde edilir.

10.5. ÖDEV. f, $2\pi-$periyodik, sürekli ve Fourier serisi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\sigma_n(f)(x)$ Fejer polinomlarının

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

olduğunu gösteriniz.