KONVOLUSYON

11.1. UYARI. $L^1_{2\pi} = L^1(-\pi,\pi)$; $(-\pi,\pi)$ üzerinde mutlak integrallenebilen $2\pi-$periyodik fonksiyonlarının uzayı olup, bu uzaydaki norm

$$\|f\|_{L^1_{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx$$

şeklindedir. $L^2_{2\pi} = L^2(-\pi,\pi)$ uzayı, $\|f\|_{L^2_{2\pi}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ normu ile, $(-\pi,\pi)$ üzerinde karesi integrallenebilen $2\pi-$periyodik fonksiyonların uzayıdır. Ayrıca, $L^2_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$ sağlanır ve herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için $2\pi-$periyodik f fonksiyonun integrali için

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\,dt$$

gerçeklenir.

11.2. TANIM. f ve g $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $2\pi-$periyodik fonksiyonlar olsunlar. İntegralin var olduğu her yerde

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

olarak tanımlanan $f*g$ fonksiyonuna f ile g nin konvolusyonu denir.

11.3. UYARI. f ve g üzerine çeşitli koşullar yüklenerek integral mutlak yakınsak yapılabilir. Örneğin,

1. Eğer konvolusyon varsa, periyodik bir fonksiyondur.

2. $f, g \in L^2_{2\pi}$ ise $(f*g)(x)$ her yerde var olup $C[-\pi,\pi]$ uzayına aittir ve,

$$\|f*g\|_{C[-\pi,\pi]} \leq \|f\|_{L^2_{2\pi}}\,\|g\|_{L^2_{2\pi}}$$

gerçeklenir.

3. $f, g \in L^1_{2\pi}$ ise $(f * g)(x)$ hemen her x için mutlak yakınsak bir integral olarak var olup, $L^1_{2\pi}$ uzayına aittir ve

$$\|f * g\|_{L^1_{2\pi}} \leq \|f\|_{L^1_{2\pi}} \|g\|_{L^1_{2\pi}}$$

gerçeklenir.

4. $f \in C[-\pi, \pi]$ ve $g \in L^1_{2\pi}$ ise $(f * g) \in C[-\pi, \pi]$ olur ve

$$\|f * g\|_{C[-\pi,\pi]} \leq \|f\|_{C[-\pi,\pi]} \|g\|_{L^1_{2\pi}}$$

gerçeklenir.

11.4. PROBLEM. $f, g \in C[-\pi, \pi]$ iken $f * g \in C[-\pi, \pi]$ olduğunu gösteriniz.

11.5. TEOREM. $f \in L^1_{2\pi}$ ise

$$\lim_{n \to \infty} \|\sigma_n(f) - f\|_{L^1_{2\pi}} = 0$$

gerçeklenir.

11.6. TEOREM. (Riemann-Lebesgue) $f \in L^1_{2\pi}$ ise f nin Fourier katsayıları a_n b_n için

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

sağlanır.

FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Analizdeki bir çok fonksiyon

$$g(x) = \int K(x, y) f(y) \, dy \tag{1}$$

şeklinde Lebesgue veya genelleştirilmiş Riemann integrali ile ifade edilirler. Böyle tanımlanan g fonksiyonuna *f nin bir integral dönüşümü* denir. Integranttaki K fonksiyonuna *dönüşümün çekirdeği* denir. İntegral dönüşümler hem soyut hem deuygulamalı matematikte çok sık kullanılır. Özellikle, bazı sınır değer problemlerinin ve bazı tip integral denklemlerin çözümünde kullanışlıdırlar. (1) formülü $g = H(f)$ şeklinde bir operatör olarak ifade edilirse, H bir integral operatör olur, dolayısı ile lineerdir.

11.7. TANIM. (Fourier Dönüşümü) *$f \in L^1_{2\pi}$ ise $\mathbb{Z}$ üzerinde*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx} dx$$

şeklinde tanımlanan $\widehat{f}$ fonksiyonuna f nin Fourier dönüşümü denir. $\widehat{f}$ nin k daki değeri, k nci Fourier katsayısıdır.

11.8. TEOREM. *$f, g \in L^1_{2\pi}$ ise $\widehat{(f * g)}(k) = \widehat{f}(k)\,\widehat{g}(k)$ gerçeklenir.*

11.9. TEOREM. (Riemann-Lebesgue) *$f \in L^1_{2\pi}$ ise $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0$ gerçeklenir.*

11.10. SONUÇ. *Konvolusyon işleminin $L^1_{2\pi}$ uzayında birim elemanı yoktur.*

11.11. TANIM. $\mathbb{R}$ de $\delta(x) = \begin{cases} 0; & x \neq 0 \\ \infty; & x = 0 \end{cases}$ ve $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx = 1$ *şeklinde tanımlanan δ fonksiyonuna Dirac-δ fonksiyonu denir.*